INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD
Primer curso

Miguel Ángel García Álvarez

EJERCICIOS

Soluciones

CAPÍTULO 1

EL MODELO MATEMÁTICO

EJERCICIO 1.1 (**Problema de los 3 jugadores**). *Tres jugadores —P, Q y R— juegan partidas por parejas, comenzando P contra Q. Quien gane una partida juega con el otro jugador, hasta que uno de los jugadores gane dos partidas consecutivas, ganando entonces el juego. Describa el espacio muestral de este juego.*

Solución

Para cada partida, podemos denotar por P, Q y R al evento consistente en que la partida es ganada por P,Q y R, respectivamente. De esta forma, cada posible resultado del juego puede representarse mediante una secuencia finita de letras, tomadas del conjunto $\{P, Q, R\}$, que comienza con P o con Q y que termina con la primera ocurrencia de dos letras iguales consecutivas. Por lo tanto, se puede escribir:

$\Omega = \{(P, P), (P, R, Q, P, P), (P, R, Q, P, R, Q, P, P), \ldots\}$

$\cup \{(Q, R, P, P), (Q, R, P, Q, R, P, P), \ldots\}$

$\cup \{(Q, Q), (Q, R, P, Q, Q), (Q, R, P, Q, R, P, Q, Q), \ldots\}$

$\cup \{(P, R, Q, Q), (P, R, Q, P, R, Q, Q), \ldots\}$

$\cup \{(P, R, R,), (P, R, Q, P, R, R), \ldots\}$

$\cup \{(Q, R, R,), (Q, R, P, Q, R, R), \ldots\}$

EJERCICIO 1.2. *Un experimento aleatorio consiste en elegir al azar* 3 *números —a, b y c— en el intervalo* $[0, 1]$*, para formar la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$*. Sea A el evento 'las dos raíces de la ecuación son reales y distintas'. Represente como un conjunto Ω al espacio muestral de este experimento y al evento A como un subconjunto de Ω.*

Solución

$\Omega = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq 1\}$

$A = \{(a, b, c) \in \Omega : b^2 - 4ac > 0\}$

EJERCICIO 1.3. *Dos personas, P y Q, juegan un juego de azar, el cual consiste en ir lanzando un par de dados por turnos, comenzando por P, de tal manera que, si P obtiene una suma igual a 7, se acaba el juego, ganando P, mientras que, si Q obtiene una suma igual a 6, se acaba el juego, ganando Q. Sea A el evento 'el jugador P gana el juego'. Represente como un conjunto Ω al espacio muestral de este juego y al evento A como un subconjunto de Ω.*

Solución

Para cada lanzamiento de P (resp. Q) podemos denotar por P al evento consistente en que P (resp. Q) gana en ese lanzamiento y por $\bar{P}$ al evento consistente en que P (resp. Q) no gana en ese lanzamiento. De esta forma, cada posible resultado del juego puede representarse mediante una secuencia finita de letras, que comienza con P o con $\bar{P}$, que termina con la primera ocurrencia de P o Q, y en la cual P (con barra o sin barra) y Q (con barra o sin barra) se van alternando. Por lo tanto, se puede escribir:

$\Omega = \big\{(P), (\bar{P}, \bar{Q}, P), (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{P}, \bar{Q}, P), \ldots\big\}$

$\cup \big\{(\bar{P}, Q), (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{P}, Q), (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{P}, Q), \ldots\big\}$

$A = \big\{(P), (\bar{P}, \bar{Q}, P), (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{P}, \bar{Q}, P), \ldots\big\}$

EJERCICIO 1.4. *Sean A y B dos eventos y sean E y F los eventos 'ocurre exactamente uno de los dos eventos A y B' y 'ocurre a lo más uno de los dos eventos A y B', respectivamente. Exprese los eventos E y F en términos de A y B.*

Solución

$E = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = A \cup B - A \cap B$

$F = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cap B)^c$

EJERCICIO 1.5. *Un trabajador produce n partes de un artículo. Sea A_i el evento 'la i-ésima parte está defectuosa'. Exprese en términos de los A_i cada uno de los siguientes* *eventos: a) ninguna de las n partes está defectuosa, b) al menos una de las n partes está defectuosa, c) exactamente una de las n partes está defectuosa.*

Solución

a. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$

b. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

c. $\bigcup_{i=1}^{n} \left[A_i \cap \left(\bigcap_{j \neq i} A_j^c \right) \right]$

CAPÍTULO 2

LAS REGLAS BÁSICAS

Ejercicio 2.1. *Un experimento aleatorio admite únicamente dos posibles resultados, uno de ellos ocurre con probabilidad p y el otro con probabilidad p^2. Encuentre el valor de p.*

Solución

$p + p^2 = 1$, así que $p = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.618$, ya que p debe ser no negativo.

Ejercicio 2.2. *Sean A y B dos eventos tales que $P(B) = 0.6$ y $P(A \cap B) = 0.2$. Encuentre $P(A \cup B^c)$.*

Solución

$A \cup B^c = (A \cap B) \cup B^c$, así que:

$P(A \cup B^c) = P(A \cap B) + P(B^c) = 0.2 + 0.4 = 0.6$

Otro método:

$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A - A \cap B)$

$= P(A) + P(B^c) - P(A) + P(A \cap B) = P(B^c) + P(A \cap B) = 0.4 + 0.2 = 0.6$

Ejercicio 2.3. *Sean A y B dos eventos relativos a un experimento aleatorio y supongamos que la probabilidad de que A ocurra es $\frac{3}{8}$, la probabilidad de que B ocurra es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los dos eventos A y B es $\frac{5}{8}$. Encuentre la probabilidad de que ocurra A pero no B.*

Solución

Se tiene:

$P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$

$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{8}$

Por lo tanto, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ y entonces $P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 2.4. *Sean A y B dos eventos relativos a un experimento aleatorio y supongamos que la probabilidad de que A ocurra es $\frac{3}{5}$, la probabilidad de que B ocurra es $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de que ocurra A pero no B es $\frac{1}{2}$. Encuentre la probabilidad de que a) ocurra al menos uno de los dos eventos A y B y b) ocurra exactamente uno de los dos eventos A y B.*

Solución

Se tiene $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ y $P(A - A \cap B) = P(A - B) = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A) - \frac{1}{2} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$

b. $P(A - A \cap B) + P(B - A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Ejercicio 2.5. *Sean A y B dos eventos relativos a un experimento aleatorio. Supongamos que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Encuentre a) $P(A \cup B)$, b) $P(A^c \cup B^c)$ y c) $P(A^c \cap B)$.*

Solución

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

b. $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

c. $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

Ejercicio 2.6. *La unión de dos eventos A y B se puede expresar como la unión de dos eventos mutuamente excluyentes, a saber, A y $B - A \cap B$. Exprese la unión de tres eventos A, B y C como unión de eventos mutuamente excluyentes y utilice esta representación para demostrar la siguiente fórmula:*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Solución

Se tiene:

$A \cup B \cup C = (A - A \cap B) \cup (B - B \cap C) \cup (C - A \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

Así que:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

EJERCICIO 2.7. *Sean A, B y C tres eventos relativos a un experimento aleatorio. Supongamos que $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, $P(B \cap C) = \frac{3}{16}$ y $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$. Encuentre la probabilidad de que no ocurra A, ni B, ni C.*

Solución

$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)P(A \cap B \cap C)]$

$= 1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} - \frac{3}{16}\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16}$

EJERCICIO 2.8 (**Regla de la suma para n eventos**). *Demuestre que si $A_1, \ldots A_n$ son n eventos cualesquiera, entonces:*

$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{\{i,j \in \{1,\ldots,n\},: i \neq j\}} P(A_i \cap A_j)$

$+ \sum_{\{i,j,k \in \{1,\ldots,n\},: i \neq j, j \neq k, i \neq k\}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n)$

Solución

La demostración se hará por inducción sobre el número de eventos n. Para $n = 2$ ya se tiene el resultado. Supongamos ahora que la propiedad es válida para el caso de cualesquiera $m - 1$ eventos y sean $A_1, \ldots A_m$ m eventos cualesquiera. Se tiene entonces:

$P(\cup_{k=1}^{m} A_k) = P(\cup_{k=1}^{m-1} A_k) + P(A_m) - P(A_m \cap \{\cup_{k=1}^{m-1} A_k\})$

$= P(\cup_{k=1}^{m-1} A_k) + P(A_m) - P(\cup_{k=1}^{m-1} A_k \cap A_m)$

$= \sum_{k=1}^{m-1} P(A_k) - \sum_{\{i,j \in \{1,\ldots m-1\}, i \neq j\}} P(A_i \cap A_j)$

$+\sum_{\{i,j,k\in\{1,\dots m-1\},i\neq j,j\neq k,i\neq k\}} P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\dots$

$+(-1)^m P(A_1\cap A_2\dots\cap A_{m-1})+P(A_m)-\sum_{k=1}^{m-1} P(A_k\cap A_n)$

$+\sum_{\{i,j\in\{1,\dots m-1\},i\neq j\}} P((A_i\cap A_m)\cap(A_j\cap A_m))$

$-\sum_{\{i,j,k\in\{1,\dots m-1\},i\neq j,j\neq k,i\neq k\}} P((A_i\cap A_m)\cap(A_j\cap A_m)\cap(A_k\cap A_m))$

$+\dots-(-1)^m P((A_1\cap A_m)\cap(A_2\cap A_m)\dots\cap(A_{m-1}\cap A_m))$

$=\sum_{k=1}^{m} P(A_k)-\sum_{\{i,j\in\{1,\dots m\},i\neq j\}} P(A_i\cap A_j)$

$+\sum_{\{i,j,k\in\{1,\dots m\},i\neq j,j\neq k,i\neq k\}} P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\dots+(-1)^{m+1}P(A_1\cap\dots\cap A_m)$

Por lo tanto, la propiedad es válida para m eventos cualesquiera.

Así que, por el principio de inducción matemática, la propiedad es válida para cualquier $n\in\mathbb{N}$.

Ejercicio 2.9. *Sean A y B eventos con probabilidad positiva tales que $A\subset B$. Demuestre que a) $P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}$ y b) $P(B|A)=1$.*

Solución

a. $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$

b. $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

Ejercicio 2.10. *Sean A y B eventos de probabilidad positiva tales que $P(A\mid B)<P(A)$, demuestre que $P(B\mid A)<P(B)$.*

Solución

$P(B\mid A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}<P(B)$

Ejercicio 2.11. *Sean A y B eventos con probabilidad positiva tales que $P(A)=P(B)$, demuestre que $P(A|B)=P(B|A)$.*

Solución

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B|A)$

EJERCICIO 2.12. *Un dado desbalanceado está hecho de tal forma que la probabilidad de obtener el número k es igual a ck, en donde c es una constante y $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Un experimento aleatorio consiste en lanzar dicho dado. Dado que al lanzar el dado se obtiene un número par, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga el número 2?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Se obtiene un número par.

B: Se obtiene el número 2.

Entonces:

$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{2c}{2c+4c+6c} = \frac{1}{6}$

EJERCICIO 2.13. *En una ciudad se publican los periódicos A, B y C. Una encuesta reciente muestra que 20% de los habitantes adultos de la ciudad lee A, 16% lee B, 14% lee C, 8% lee A y B, 5% lee A y C, 4% lee B y C y 2% lee A, B y C. Si se elige un adulto al azar, calcule la probabilidad de que a) no lea ninguno de los periódicos, b) lea exactamente uno de los periódicos y c) lea al menos A y B sabiendo que lee al menos uno de los 3 periódicos.*

Solución

a. $P\left[(A \cup B \cup C)^c\right] = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$= 1 - 0.2 - 0.16 - 0.14 + 0.08 + 0.05 + 0.04 - 0.02 = 0.65$

b. $P\left[(A \cup B \cup C) \cap (B \cup C)^c)\right] + P\left[(A \cup B \cup C) \cap (A \cup C)^c)\right]$

$+P\left[(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)^c)\right]$

$= 3P(A \cup B \cup C) - P(B \cup C) - P(A \cup C) - P(A \cup B)$

$= 3P(A \cup B \cup C) - 2P(A) - 2P(B) - 2P(C) + P(B \cap C) + P(A \cap C) + P(A \cap B)$

$= 3(0.35) - 2(0.2) - 2(0.16) - 2(0.14) + 0.04 + 0.05 + 0.08 = 0.22$

c. $P(A \cap B \mid A \cup B \cup C) = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B\cup C)} = \frac{0.08}{0.35} = \frac{8}{35} = 0.228571$

EJERCICIO 2.14. *Dada una población formada exclusivamente por hermanos gemelos, consideremos el experimento aleatorio consistente en seleccionar primero una pareja de hermanos gemelos al azar y después, también al azar, uno de los hermanos de esa pareja. Supongamos que la probabilidad de que los hermanos gemelos seleccionados sean del mismo sexo es igual a* 0.7 *y que la probabilidad de que la persona seleccionada en la segunda parte del experimento sea de sexo masculino es igual a* 0.4*. Sabiendo que la persona seleccionada en la segunda parte del experimento es de sexo masculino, ¿cuál es la probabilidad de que su hermano también lo sea?*

Sugerencia: *Represente* Ω *como* $\Omega = \{(MM)M, (FF)F, (MF)M, (MF)F\}$ *y encuentre la probabilidad de cada uno de sus elementos.*

Solución

Se sabe:

$P\left(\{(MM)M, (MF)M\}\right) = 0.4$

$P\left(\{(MM)M, (FF)F\}\right) = 0.7$

$P\left(\{(MF)M\}\right) = P\left(\{(MF)F\}\right)$

Así que:

$P\left(\{(MF)M\}\right) = P\left(\{(MF)F\}\right) = 0.15$

$P\left(\{(MM)M\}\right) = 0.25$

$P\left(\{(FF)F\}\right) = 0.35$

Definamos los eventos:

A: El hermano gemelo seleccionado es de sexo masculino.

B: El hermano del gemelo seleccionado es de sexo masculino.

Entonces:

$A = \{(MM)M, (MF)M\}$

$B = \{(MM)M, (MF)F\}$

$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = 0.625$

Otro método:

Definamos el evento:

C: Los dos hermanos gemelos tienen el mismo sexo.

Entonces:

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(A) - P(A \cap C^c)$

$= P(A) - P(A \mid C^c)P(C^c) = 0.4 - (0.5)(0.3) = 0.25$

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = 0.625$

EJERCICIO 2.15 (**Regla del producto**). *Demuestre que si* $A_1, \ldots A_n$ *son* n *eventos cualesquiera, entonces:*

$P(\cap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1)$

Solución

La demostración se hará por inducción sobre el número de eventos n. Para $n = 2$ ya se tiene el resultado. Supongamos ahora que la propiedad es válida para el caso de cualesquiera $n - 1$ eventos y sean $A_1, A \ldots A_n$ n eventos cualesquiera. Se tiene entonces:

$P(\cap_{k=1}^{n} A_k) = P\left(\cap_{k=1}^{n-1} A_k \cap A_n\right) = P\left(A_n \mid \cap_{k=1}^{n-1} A_k\right) P\left(\cap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$

$= P\left(A_n \mid \cap_{k=1}^{n-1} A_k\right) P(A_{n-1} | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1)$

$= P\left(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) P(A_{n-1} | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1)$

EJERCICIO 2.16. *Consideremos una urna que contiene* r *bolas rojas y* b *bolas blancas y un experimento aleatorio que consiste en dos partes, en la primera se selecciona al azar una bola de la urna y se deja fuera de ésta, en la segunda se selecciona al azar una de las bolas restantes. Denotemos por* $R_1, \ldots, R_r$ *a las bolas rojas. El hecho de que la segunda elección sea al azar se traduce inmediatamente, por ejemplo, en que la probabilidad de obtener en la segunda elección la bola* R_i *dado que en la primera se obtiene la bola* R_j *es igual a* $\frac{1}{r+b-1}$ *para cualquier* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *con* $i \neq j$*; por la propiedad de la aditividad finita se sigue entonces que la probabilidad de obtener en la segunda elección una bola roja, dado que en la primera se obtiene la bola* R_j*, es igual a* $\frac{r-1}{r+b-1}$ *para cualquier* $j \in \{1, \ldots, r\}$*. Nos gustaría entonces poder decir simplemente que la probabilidad de que la segunda bola seleccionada sea roja dado que la primera también lo es está dada también por* $\frac{r-1}{r+b-1}$*. Esto es correcto, pero requiere de un* *pequeño razonamiento que demuestre su validez. Demuestre el siguiente resultado general y utilícelo para fundamentar esta conclusión.*

Sean $A_1, \dots, A_n$ n eventos mutuamente excluyentes de probabilidad positiva y B un evento tal que $P(B \mid A_1) = \cdots = P(B \mid A_n) = c$, entonces $P(B \mid A_1 \cup \cdots \cup A_n) = c$.

Solución

$P(B \mid A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \frac{P[B\cap(A_1\cup\cdots\cup A_n)]}{P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)} = \frac{P(B\cap A_1)+\cdots+P(B\cap A_n)}{P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)}$

$= \frac{P(B|A_1)P(A_1)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n)}{P(A_1)+\cdots+P(A_n)} = c\frac{P(A_1)+\cdots P(A_n)}{P(A_1)+\cdots+P(A_n)} = c$

Sea entonces, para $j \in \{1, 2, \dots, r\}$:

B: La segunda bola seleccionada es roja.

$\dot{A}$: La primera bola seleccionada es roja.

A_j: La primera bola seleccionada es R_j.

Entonces:

$P(B \mid A_1) = \cdots = P(B \mid A_r) = \frac{r-1}{r+b-1}$

Así que:

$P(B \mid A) = P(B \mid A_1 \cup \cdots \cup A_r) = \frac{r-1}{r+b-1}$

Ejercicio 2.17. *Las letras A,A,A,C,E,I,M,M,T,T se colocan al azar, una después de la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga la palabra MATEMATICA?*

Solución

$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{2}{5}\frac{1}{6}\frac{1}{7}\frac{2}{8}\frac{3}{9}\frac{2}{10} = \frac{1}{151200} = 6.61376 \times 10^{-6}$

Ejercicio 2.18. *Un ropero contiene 10 pares (distintos) de zapatos. Si se escogen al azar 5 zapatos, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra contenga exactamente uno de los pares originales?*

Solución

Definamos los eventos:

A_i: El i-ésimo zapato seleccionado no forma par con alguno de los anteriores.

C: La muestra contiene exactamente uno de los pares originales.

Entonces:

$P(C) = P(A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + P(A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5)$

$+P(A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c)$

$= P(A_5 \mid A_2^c \cap A_3 \cap A_4)P(A_4 \mid A_2^c \cap A_3)P(A_3 \mid A_2^c)P(A_2^c)$

$+P(A_5 \mid A_2 \cap A_3^c \cap A_4)P(A_4 \mid A_2 \cap A_3^c)P(A_3^c \mid A_2)P(A_2)$

$+P(A_5 \mid A_2 \cap A_3 \cap A_4^c)P(A_4^c \mid A_2 \cap A_3)P(A_3 \mid A_2)P(A_2)$

$+P(A_5^c \mid A_2 \cap A_3 \cap A_4)P(A_4 \mid A_2 \cap A_3)P(A_3 \mid A_2)P(A_2)$

$= \frac{14}{16}\frac{16}{17}\frac{1}{19} + \frac{14}{16}\frac{16}{17}\frac{2}{18}\frac{18}{19} + \frac{14}{16}\frac{3}{17}\frac{16}{18}\frac{18}{19} + \frac{4}{16}\frac{14}{17}\frac{16}{18}\frac{18}{19} = \frac{140}{323}$

Otro método:

$P(C) = \frac{10\binom{9}{3}2^3}{\binom{20}{5}} = \frac{140}{323}$

Ejercicio 2.19. *Un ropero contiene* 10 *pares (distintos) de zapatos. Si se escogen al azar* 3 *zapatos, ¿cuál es la probabilidad de que se obtengan* 2 *que formen un par?*

Solución

Definamos los eventos:

A: El segundo zapato seleccionado forma par con el primero.

B: El tercer zapato seleccionado forma par con alguno de los dos anteriores.

C: En la muestra hay 2 zapatos que forman un par.

Método 1:

$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - P(B^c \mid A^c)P(A^c) = 1 - \frac{16}{18}\frac{18}{19} = \frac{3}{19}$

Método 2:

$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{\binom{10}{3}2^3}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{19}$

Método 3:

$P(C) = \frac{10\cdot 18}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{19}$

Método 4:

$P(C) = P(A)+P(B) = P(A)+P(B\cap A^c) = P(A)+P(B \mid A^c)P(A^c) = \frac{1}{19}+\frac{2}{18}\frac{18}{19} = \frac{3}{19}$

Ejercicio 2.20. *De una caja que contiene n pares (distintos) de zapatos se seleccionan al azar $2r$ zapatos con $2r < n$. Encuentre la probabilidad de que con los zapatos seleccionados a) no se forme algún par y b) se forme exactamente un par.*

Solución

Definamos:

A_i: El i-ésimo zapato que se elige no forma par con alguno de los anteriores.

a. $P(A_2 \cap \cdots \cap A_{2r}) = P(A_2)P(A_3 \mid A_2)\cdots P(A_{2r} \mid A_2 \cap \cdots \cap A_{2r-1})$

$= \frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-2}\cdots\frac{2n-2(2r-1)}{2n-(2r-1)} = 2^{2r}\frac{n!/(n-2r)!}{(2n)!/(2n-2r)!} = 2^{2r}\frac{\binom{n}{2r}}{\binom{2n}{2r}}$

b. $P(A_2^c \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{2r}) + P(A_2 \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_{2r}) + \cdots + P(A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{2r}^c)$

$= \frac{1}{2n-1}\frac{2n-2}{2n-2}\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2n-2(2r-2)}{2n-(2r-1)} + \frac{2n-2}{2n-1}\frac{2}{2n-2}\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2n-2(2r-2)}{2n-(2r-1)} + \cdots$

$+\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-2}\cdots\frac{2n-2(2r-2)}{2n-(2r-2)}\frac{2r-1}{2n-(2r-1)}$

$= \frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-2}\cdots\frac{2n-2(2r-2)}{2n-(2r-2)}\frac{1}{2n-(2r-1)}\left[1+\cdots+(2r-1)\right]$

$= r(2r-1)2^{2r-1}\frac{n!/(n-2r+1)!}{(2n)!/(2n-2r)!} = nr(2r-1)2^{2r-1}\frac{(n-1)!/(n-2r+1)!}{(2n)!/(2n-2r)!} = n2^{2r-2}\frac{\binom{n-1}{2r-2}}{\binom{2n}{2r}}$

Ejercicio 2.21. *En un pueblo de $n+1$ habitantes, una persona le rumorea algo a una segunda persona, quien a su vez lo repite a una tercera, etc. En cada caso, la persona escoge al receptor del rumor, al azar, de entre las otras n personas del pueblo. Si el rumor se transmite r veces ($r < n$), encuentre la probabilidad de que a) no regrese a la que lo originó y b) que no pase dos veces por la misma persona.*

Solución

a. Para $k \in \{1, \ldots, r\}$, sea:

A_k: La k-ésima persona transmite el rumor a una persona distinta a la que lo originó.

Entonces:

$P(\cap_{k=1}^{r} A_k) = P(A_r|A_1 \cap \ldots \cap A_{r-1}) \cdots P(A_2|A_1)P(A_1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}$

b. Para $k \in \{1, \ldots, r\}$, sea:

B_k: La k-ésima persona transmite el rumor a una persona por la que no ha pasado.

Entonces:

$P(\cap_{k=1}^{r} B_k) = P(B_r|B_1 \cap \ldots \cap B_{r-1}) \cdots P(B_2|B_1)P(B_1)$

$= \frac{n-(r-1)}{n} \frac{n-(r-2)}{n} \cdots \frac{n-1}{n} = \binom{n}{r} \frac{r!}{n^r}$

EJERCICIO 2.22. *En un concurso se colocan tres puertas y detrás de ellas se colocan tres premios, uno de los cuales es un autómovil y los otros dos son pequeños regalos de consolación. Los premios se colocan de tal manera que la probabilidad de que el automóvil se coloque detrás de la puerta número* 1 *es igual a* q *mientras que la probabilidad de que se coloque detrás de la puerta número* 2 *es igual a* $\frac{1-q}{2}$. *A cada concursante se le asigna inicialmente la puerta número* 1, *pero otra persona, que puede ver como están colocados los premios, abre alguna de las puertas* 2 *y* 3 *en donde no se encuentre el autómovil, de tal manera que, si no se encuentre en ninguna de ellas, abre la número* 2 *con probabilidad* p *y la número* 3 *con probabilidad* $1-p$. *El concursante, quien conoce los valores de* p *y* q, *tiene entonces la opción de escoger cualquiera de las dos puertas que se encuentren cerradas. ¿Cuál es la mejor estrategia del concursante para tratar de conseguir el automóvil?*

Solución

El espacio muestral del experimento aleatorio está dado por:

$\Omega = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,2)\}$

donde, en cada pareja de números, el primero indica la puerta detrás de la cual se coloca el autómovil y el segundo indica la puerta abierta que se muestra al concursante.

Se tiene:

$P[(1,2)] = qp$

$P[(1,3)] = q(1-p)$

$P[(2,3)] = \frac{1-q}{2}$

$P[(3,2)] = \frac{1-q}{2}$

Definamos los eventos:

A: El automóvil se encuentra detrás de la puerta número 1.

B: La puerta abierta que se muestra al concursante es la número 2.

C: La puerta abierta que se muestra al concursante es la número 3.

El primer análisis que se puede hacer consiste en decir que como $P(A) = q$, entonces, antes de que se muestre al concursante la puerta que se abre, si $q < \frac{1}{2}$, la mejor estrategia consiste en cambiar de puerta, teniendo así una probabilidad de ganar el automóvil igual a $1 - q > \frac{1}{2}$, mientras que si $q > \frac{1}{2}$, la mejor estrategia consiste en elegir la puerta número 1, teniendo así una probabilidad de ganar el automóvil igual a q. Sin embargo conviene hacer un análisis más detallado pues pudiera ser que la ocurrencia de B o de C incremente o decremente la probabilidad de A.

Se tiene:

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{qp}{qp + \frac{1-q}{2}} = \frac{2qp}{2qp+1-q}$

La función $f(p) = \frac{2qp}{2qp+1-q}$, definida en el intervalo $[0, 1]$, es creciente, de manera que su valor mínimo es $f(0) = 0$, mientras que su valor máximo es $f(1) = \frac{2q}{q+1}$; además $f(\frac{1-q}{2q}) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, si B ocurre y $p > \frac{1-q}{2q}$, la mejor estrategia consiste en elegir la puerta número 1, mientras que si B ocurre y $p < \frac{1-q}{2q}$, la mejor estrategia consiste en cambiar de puerta. Evidentemente la conclusión en caso de que C ocurra se obtiene de la anterior cambiando p por $1 - p$. En otras palabras, si C ocurre y $p < \frac{3q-1}{2q}$, la mejor estrategia consiste en elegir la puerta número 1, mientras que si C ocurre y $p > \frac{3q-1}{2q}$, la mejor estrategia consiste en cambiar de puerta.

Ejercicio 2.23. *Sean A y B dos eventos independientes tales que la probabilidad de que ocurran simultáneamente es de $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de que ninguno ocurra es de $\frac{1}{3}$. Encuentre $P(A)$ y $P(B)$.*

Solución

Se sabe $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ y $P((A \cup B)^c) = \frac{1}{3}$, de manera que:

$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{5}{6}$

$P(A)P(B) = P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$, o bien, $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{1}{3}$.

EJERCICIO 2.24. *Sean A y B dos eventos independientes y supongamos que $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$. Encuentre $P(B)$.*

Solución

Por la regla de la suma, se tiene $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2}P(B)$, así que $P(B) = \frac{2}{5}$.

EJERCICIO 2.25. *Sean A y B dos eventos relativos a un experimento aleatorio. Supongamos que $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$ y sea $p = P(B)$. a) ¿Para que valor de p son A y B mutuamente excluyentes? b) ¿Para que valor de p son A y B independientes?*

Solución

a) A y B son mutuamente excluyentes si y sólo si:

$0.7 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.4 + p$

Así que, $p = 0.3$.

b) A y B son independientes si y sólo si:

$0.7 - 0.4 - p = P(A \cup B) - P(A) + P(B) = P(A \cap B)$

$= P(A)P(B) = 0.4p$

Así que, $p = 0.5$.

EJERCICIO 2.26. *Un experimento aleatorio consiste en lanzar un par de dados, uno blanco y uno azul. Sea A el evento 'se obtiene 1 o 2 con el dado blanco' y sea B el evento 'la suma de los números que se obtienen es igual a 7'. ¿Son A y B eventos independientes? Justifique su respuesta.*

Solución

$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{18}$, $P(A)P(B) = \frac{1}{18}$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, por lo tanto, A y B son independientes.

EJERCICIO 2.27. *Muestre con un ejemplo que es posible tener 3 eventos A, B y C tales que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ pero de tal manera que estos eventos no sean independientes.*

Solución

Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar 4 veces una moneda en forma consecutiva, observando el resultado que se obtiene en cada lanzamiento, pudiendo éste ser A o S. Definamos entonces los siguientes eventos:

$A = \{(S, S, S, S), (S, S, A, A), (S, A, S, S), (S, A, S, A),$

$(A, S, A, A), (A, A, S, A), (A, S, A, S), (A, S, S, S)\}$

$B = \{(S, S, S, S), (S, S, A, A), (S, S, S, A), (S, A, A, A),$

$(A, A, A, A), (A, A, A, S), (A, A, S, S), (A, S, S, S)\}$

C: Se obtiene S en el primer lanzamiento.

Se tiene $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, pero $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

Otro ejemplo:

Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar 4 veces una moneda en forma consecutiva, observando el resultado que se obtiene en cada lanzamiento, pudiendo éste ser A o S. Definamos entonces los siguientes eventos:

$A = \{(S, S, S, S), (S, S, A, A), (S, A, S, S), (A, S, S, A),$

$(A, S, A, S), (A, S, A, A), (A, A, S, A), (A, S, S, S)\}$

$B = \{(S, S, S, S), (S, S, A, A), (S, S, S, A), (S, A, A, A),$

$(A, A, A, A), (A, A, A, S), (A, A, S, S), (A, S, S, S)\}$

C: Se obtiene S en el primer lanzamiento.

Se tiene $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, pero $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$.

EJERCICIO 2.28. *Se tienen dos dados, uno rojo y uno azul. Un experimento aleatorio consiste en lanzar el par de dados dos veces consecutivas. Encuentre la probabilidad* *de que se obtenga exactamente el mismo resultado en los dos lanzamientos, es decir, el mismo número con el dado rojo y el mismo número con el dado azul.*

Solución

Definamos los eventos:

A: Se obtiene el mismo resultado con el dado azul.

B: Se obtiene el mismo resultado con el dado rojo.

Entonces:

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{6}{36}\frac{6}{36} = \frac{1}{36}$

Ejercicio 2.29. *Calcule el número de lanzamientos de un par de dados que se requieren para que sea más favorable obtener por lo menos un par de seises que no obtenerlo.*[1]

Solución

Definamos:

A: Se obtiene por lo menos un par de seises en n lanzamientos.

Entonces:

$P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$

Así que, $P(A) \geq \frac{1}{2}$ si y sólo si $n \geq -\frac{\ln 2}{\ln \frac{35}{36}} = 24.605$, es decir, $n \geq 25$

Ejercicio 2.30. *Calcule el número de lanzamientos de tres dados que se requieren para que sea más favorable obtener por lo menos una tercia de cincos que no obtenerla.*

Solución

Definamos:

A: Se obtiene por lo menos una tercia de cincos en n lanzamientos.

Entonces:

[1] Este problema fue resuelto en forma correcta en el año 1654 por Blaise Pascal, siendo uno de los primeros problemas de probabilidad relativamente complejo que se planteó.

$P(A) = 1 - \left(\frac{215}{216}\right)^n \geq \frac{1}{2}$, $n \geq -\frac{\ln 2}{\ln \frac{215}{216}} = 149.4$, $n \geq 150$

EJERCICIO 2.31. *Cada una de n urnas contiene N bolas numeradas de 1 a N. Se extrae una bola al azar de cada urna. Calcule la probabilidad de que m sea el más grande número extraído, donde $m \in \{1, \ldots, N\}$.*

Solución

$\left(\frac{m}{N}\right)^n - \left(\frac{m-1}{N}\right)^n$

EJERCICIO 2.32. *Un experimento aleatorio consiste en lanzar sucesivamente una moneda balanceada hasta que se obtengan dos resultados iguales en forma consecutiva. Encuentre la probabilidad de que el experimento termine en el sexto lanzamiento.*

Solución

$P(SASASS) + P(ASASAA) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{32}$

EJERCICIO 2.33. *Una urna contiene 2 bolas negras y 4 bolas blancas. Un experimento aleatorio consiste en ir seleccionando al azar una bola de la urna, regresándola después de observar su color, hasta que salgan dos bolas del mismo color en forma consecutiva. Encuentre la probabilidad de que este proceso termine antes de la cuarta elección.*

Solución

$P(BB) + P(NBB) + P(NN) + P(BNN)$

$= \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \frac{2}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{4}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{7}{9} \approx 0.777778$

EJERCICIO 2.34. *Una máquina está compuesta de 4 componentes que funcionan independientemente uno del otro y que están organizados de tal manera que la máquina falla únicamente si los 4 componentes fallan. Supongamos que las probabilidades de que cada componente falle son 0.1, 0.2, 0.25 y 0.3 respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione bien?*

Solución

$1 - (0.1)(0.2)(0.25)(0.3) = 0.9985$

EJERCICIO 2.35. *Un componente de una cierta máquina falla el* 20% *de las veces. Con el objeto de disminuir la probabilidad de que la máquina falle, se instalan en la máquina* n *de dichos componentes de tal manera que la máquina falla únicamente cuando los* n *componentes fallan. Asumiendo que los* n *componentes funcionan de manera independiente, ¿cuál es el más pequeño valor de* n *que garantiza que la máquina funcionará bien el* 99% *de las veces?*

Solución

$P(\text{los } n \text{ componentes fallan}) = (0.2)^n \leq 0.01$, así que $n \geq 3$.

EJERCICIO 2.36. *Dos equipos* A *y* B *van a jugar una serie de juegos de beisbol. El equipo que gane* 2 *de* 3 *juegos gana la serie. El primer juego se realizará en el estadio del equipo* A*, el segundo se hará en el estadio del equipo* B *y, en caso de llegar a un tercer juego, el último juego se efectuará en el estadio del equipo* B*. Se sabe que cuando juega en su estadio, el equipo* A *tiene una probabilidad de ganarle al equipo* B *igual a* 0.7*, mientras que cuando se juega en el estadio del equipo* B*, la probabilidad de que el equipo* A *le gane al equipo* B *es igual a* 0.2*. Suponiendo que los resultados de los juegos son independientes entre sí, calcule la probabilidad de que el equipo* A *gane la serie.*

Solución

Definamos los eventos:

A_i: El equipo A gana el juego i.

A: El equipo A gana la serie.

Entonces:

$P(A) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3)$

$= (0.7)(0.2) + (0.7)(0.8)(0.2) + (0.3)(0.2)(0.2) = 0.264$

EJERCICIO 2.37. *En una cierta compañía el esquema para aprobar una propuesta es el siguiente: tres personas —A, B y C— analizan la propuesta y ésta es aprobada únicamente si por lo menos dos de las tres personas dan su visto bueno. Se sabe que las tres personas analizan cada propuesta en forma independiente y que las probabilidades de que den su visto bueno ante una propuesta son* 0.3*,* 0.2 *y* 0.1*, respectivamente. a) ¿Cuál es la probabilidad de que una determinada propuesta sea aprobada. b) Si se* *sabe que una propuesta es aprobada, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea aprobada por C?*

Solución

Definamos:

D: La propuesta es aprobada.

a) $P(D) = P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC) + P(ABC)$

$= (0.3)(0.2)(0.9) + (0.3)(0.8)(0.1) + (0.7)(0.2)(0.1) + (0.3)(0.2)(0.1) = 0.098$

b) $P(C \mid D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)}$

$P(D \mid C) = P(A \cup B) = 0.3 + 0.2 - 0.06 = 0.44$

$P(D) = P(ABC) + P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC)$

$= 0.006 + 0.054 + 0.024 + 0.014 = 0.098$

$P(C \mid D) = \frac{(0.44)(0.1)}{0.098} = \frac{44}{98} = 0.44898$

Otro método:

$P(C \mid D) = \frac{P(ABC)+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)}{P(D)} = \frac{0.006+0.024+0.014}{0.098} = \frac{44}{98} = 0.44898$

Ejercicio 2.38. *En una cierta compañía, la toma de decisiones sigue el esquema que se muestra a continuación: Cualquier propuesta pasa primero por A; si la aprueba, entonces la propuesta se pasa a B, C y D; si ya sea B o D la aprueban, la propuesta pasa entonces a E; si ya sea E o C aprueban la propuesta entonces se pasa a F. La propuesta es aprobada finalmente únicamente si ésta llega hasta F y a su vez F la aprueba. Supongamos que la probabilidad de que A, C y F aprueben cualquier propuesta que les llegue es* 0.5*, mientras que la probabilidad de que B, D y E aprueben cualquier propuesta que les llegue es* 0.7*. Supongamos además que A, B, C, D, E y F toman sus decisiones independientemente uno del otro. a) ¿Cuál es la probabilidad de que una determinada propuesta sea aprobada? b) Si se sabe que una propuesta es aprobada, ¿cuál es la probabilidad de que pase por E? c) Si se sabe que una propuesta es aprobada, ¿cuál es la probabilidad de que pase por C y éste la apruebe?*

Solución

Definamos:

D: La propuesta es aprobada.

a) $P(D) = P[A \cap C^c \cap (B \cup D) \cap E \cap F] + P(A \cap C \cap F)$

$= (0.5)(0.5)(0.91)(0.7)(0.5) + (0.5)^3 = 0.20463$

b) $\frac{P[A \cap C^c \cap (B \cup D) \cap E \cap F] + P(A \cap C \cap (B \cup D) \cap F)}{P(D)} = \frac{(0.5)(0.5)(0.91)(0.7)(0.5) + (0.5)^3(0.91)}{0.20463}$

$= \frac{0.19338}{0.20463} = 0.94502$

c) $\frac{P(A \cap C \cap F)}{P(D)} = \frac{(0.5)^3}{0.20463} = 0.61086$

EJERCICIO 2.39. *Dos personas P y Q juegan a lanzar consecutivamente una moneda balanceada con la condición de que cada vez que se obtenga cara, P gana un punto, mientras que Q lo gana cuando se obtiene cruz. Cada persona apuesta una cantidad x y convienen en que gana el juego quien obtenga primero 4 puntos. Supongamos que, cuando el jugador P lleva ganado un punto y el jugador Q dos puntos, se les pierde la moneda y no pueden continuar el juego. ¿Cómo deben repartirse las apuestas en ese momento de manera que se tome en cuenta correctamente el número de puntos que lleva ganado cada uno?*

Solución

Definamos los eventos:

P_n: El jugador P gana la partida n.

Q_n: El jugador Q gana la partida n.

Entonces:

$P(\text{Q gana el juego}) = P(Q_4Q_5) + P(Q_4P_5Q_6) + P(P_4Q_5Q_6) + P(Q_4P_5P_6Q_7) +$

$+ P(P_4P_5Q_6Q_7) + P(P_4Q_5P_6Q_7) = \frac{1}{4} + 2(\frac{1}{8}) + 3(\frac{1}{16}) = \frac{11}{16}$

Así que, la repartición de las apuestas debe de ser de 11 a 5.

EJERCICIO 2.40. *Sean A y B dos eventos independientes. Demuestre que también son independientes a) A^c y B^c, b) A y B^c y c) A^c y B.*

Solución

Basta con demostrar b o c pues, una vez demostrado uno de ellos, los otros dos incisos se obtienen aplicando este resultado varias veces.

$P(A \cap B^c) = P\left[A - A \cap B\right] = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B)$

$= P(A)\left[1 - P(B)\right] = P(A)P(B^c)$

COMPLEMENTO

$P(A^c \cap B^c) = P\left[(A \cup B)^c\right] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B)\left[1 - P(A)\right] = \left[1 - P(A)\right]\left[1 - P(B)\right]$

$= P(A^c)P(B^c)$

Ejercicio 2.41. *Sean A, B y C tres eventos relativos a un experimento aleatorio. ¿Cuáles de las siguientes aseveraciones son verdaderas?*

a) $P(B|A) + P(B^c|A) = 1$

b) $P(B|A) + P(B|A^c) = 1$

c) Si A y B son independientes, entonces $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.

d) Si $P(A|B) = P(B)$, entonces A y B son independientes.

e) Si $P(A) = P(B)$, entonces $P(A|B) = P(B|A)$.

f) Si $P(A|B) = P(B|A)$, entonces $P(A) = P(B)$.

g) Si $P(A) = P(B) = p$, entonces $P(A \cap B) \leq p^2$.

En todos los casos justifique su respuesta, ya sea demostrando que la aseveración es verdadera o dando un contraejemplo que muestre que la aseveración es falsa.

Solución

a) Verdadera.

$P(B|A) + P(B^c|A) = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap B^c)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

b) Falsa.

Si B es el evento imposible, entonces $P(B|A) + P(B|A^c) = 0$.

c) Falsa.

Sea $C = A \cup B$, entonces:

$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A \cup B)}$

$P(A|C)P(B|C) = \frac{P(A)P(B)}{[P(A \cup B)]^2}$

Un contraejemplo se obtiene entonces considerando dos eventos independientes de probabilidad positiva cuya unión no sea el evento seguro.

d) Falsa.

Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos veces una moneda balanceada y definamos los siguientes eventos:

A: No se obtiene cara en los dos lanzamientos.

B: Se obtiene el mismo resultado en los dos lanzamientos.

Los eventos A y B satisfacen $P(A \mid B) = P(B)$, pero no son independientes.

e) Verdadera.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$

f) Falsa.

Si A y B son complementarios, se tiene $P(A|B) = P(B|A) = 0$, pero las probabilidades de A y B pueden ser distintas. Por ejemplo, al lanzar un dado, los eventos 'se obtiene 6' y 'no se obtiene 6' son complementarios pero sus probabilidades de ocurrencia son distintas.

g) Falsa.

Si $A = B$ y $0 < p < 1$, entonces $P(A \cap B) = p > p^2$.

Ejercicio 2.42. *Dos de tres prisioneros son elegidos al azar para ser liberados. El prisionero A pide al guardia que investigue los nombres seleccionados y que le diga uno de ellos que no sea él mismo. Supongamos que el guardia acepta hacer lo que le pide el prisionero y que, en caso de que A no vaya a ser liberado, le dirá el nombre del prisionero B con probabilidad p y el del prisionero C con probabilidad $1 - p$. Consideremos entonces los siguientes eventos:*

A: El prisionero A es seleccionado para ser liberado.

B: El guardia informa al prisionero A que el prisionero B va a ser liberado.

¿Son A y B independientes?

Solución

El espacio muestral del experimento aleatorio está dado por:

$\Omega = \{(A, B), (A, C), (B, C), (C, B)\}$

donde la pareja de letras indica los nombres de los prisioneros que son seleccionados para ser liberados y la segunda letra de la pareja indica el nombre que dice el guardia al prisionero A.

Se tiene:

$P\left[(A, B)\right] = \frac{1}{3}$

$P\left[(A, C)\right] = \frac{1}{3}$

$P\left[(B, C)\right] = \frac{1}{3}(1 - p)$

$P\left[(C, B)\right] = \frac{1}{3}p$

Por lo tanto:

$P(A) = \frac{2}{3}$

$P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}(1 + p)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

$P(A)P(B) = \frac{2}{9}(1 + p)$

$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Longleftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{9}(1 + p) \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}$

Así que A y B son independientes si y sólo si $p = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 2.43. *Consideremos la situación del ejercicio 2.22 y definamos los siguientes eventos:*

A: El automóvil se encuentra detrás de la puerta número 1.

B: La puerta abierta que se muestra al concursante es la número 2.

¿Son A y B independientes?

Solución

El espacio muestral del experimento aleatorio está dado por:

$\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,2)\}$

donde, en cada pareja de números, el primero indica la puerta detrás de la cual se colooca el autómovil y el segundo indica la puerta abierta que se muestra al concursante.

Se tiene:

$P\left[(1,2)\right] = qp$

$P\left[(1,3)\right] = q(1-p)$

$P\left[(2,3)\right] = \frac{1-q}{2}$

$P\left[(3,2)\right] = \frac{1-q}{2}$

Por lo tanto:

$P(A) = q$

$P(B) = qp + \frac{1-q}{2}$

$P(A \cap B) = qp$

$P(A)P(B) = q\left(qp + \frac{1-q}{2}\right)$

$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Longleftrightarrow qp = q\left(qp + \frac{1-q}{2}\right) \Longleftrightarrow p = qp + \frac{1-q}{2}$

$\Longleftrightarrow p(1-q) = \frac{1-q}{2} \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}$

Así que A y B son independientes si y sólo si $p = \frac{1}{2}$.

CAPÍTULO 3

MUESTREO ALEATORIO

Ejercicio 3.1. *Demuestre las siguientes relaciones:*

a) $\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{k+r-1}{k} = \binom{n+r}{n}$

c) $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

e) $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}$

f) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m}2^{m}$

g) $\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 0$

h) $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 0$

donde $m, n, r \in \mathbb{N}$.

Solución

a. Por inducción sobre m a partir de $m = n$.

$\sum_{k=n}^{n} \binom{k}{n} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$

Supongamos $\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$, entonces:

$\sum_{k=n}^{m+1} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1} + \binom{m+1}{n} = \binom{m+2}{n+1}$

b. Aplicando (a) con $n = r - 1$ y $m = n + r - 1$, se obtiene:

$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r-1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r-1}{r-1}=\sum_{k=r-1}^{n+r-1}\binom{k}{r-1}=\binom{n+r}{r}=\binom{n+r}{n}$

c. $(1+t)^{n+m}=\sum_{r=0}^{n+m}\binom{n+m}{r}t^r$

$(1+t)^n(1+t)^m=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}t^k\right)$

Igualando los coeficientes de las potencias de t, se obtiene, para $r\leq n+m$:

$\sum_k\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+m}{r}$

en donde la sumatoria es sobre todos los enteros k tales que $0\leq k\leq n$, $k\leq r$ y $r-k\leq m$. Pero, para $k>n$, se tiene $\binom{n}{k}=0$ y para $r-k>m$, se tiene $\binom{m}{r-k}=0$, así que:

$\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+m}{r}$

Finalmente, para $r>n+m$, ambos miembros son iguales a 0.

d. Aplicando (c) al caso $n=m=r$, se obtiene:

$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}^2$

e. $\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{m!(k-m)!}=\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{n-k}\binom{n}{m}$

$=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-m}{k}\binom{n}{m}=\binom{n}{m}2^{n-m}$

f. $\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{n-k}\binom{n-k}{n-m}=\sum_{k=n-m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{n-m}=\binom{n}{n-m}2^m=\binom{n}{m}2^m$

g. $\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{m!(k-m)!}=\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n-m}{n-k}\binom{n}{m}$

$=\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k}=0$

h. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=(-1)^n\sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}\binom{n-k}{n-m}$

$=(-1)^n\sum_{k=n-m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{n-m}=0$

Ejercicio 3.2. *Demuestre que:*

$\sum_{k=1}^{n}k^m=\frac{1}{m+1}\left[(n+1)^{m+1}-(n+1)-\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m+1}{j}\sum_{k=1}^{n}k^j\right]$

para cualesquiera $n,m\in\mathbb{N}$.

Sugerencia: *Utilice la relación:*

$k^{m+1} = [(k-1)+1]^{m+1} = 1 + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j}(k-1)^j$

Solución

$\sum_{k=1}^{n+1} k^{m+1} = \sum_{k=1}^{n+1} [(k-1)+1]^{m+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \left[1 + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j}(k-1)^j\right]$

$= (n+1) + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^j = (n+1) + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} \sum_{k=1}^{n} k^j$

$= (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} \binom{m+1}{j} \sum_{k=1}^{n} k^j$

Así que:

$(n+1)^{m+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^{m+1} - \sum_{k=1}^{n} k^{m+1} = (n+1) + \sum_{j=1}^{m} \binom{m+1}{j} \sum_{k=1}^{n} k^j$

$= (n+1) + \binom{m+1}{m} \sum_{k=1}^{n} k^m + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m+1}{j} \sum_{k=1}^{n} k^j$

Por lo tanto:

$(m+1) \sum_{k=1}^{n} k^m = (n+1)^{m+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m+1}{j} \sum_{k=1}^{n} k^j$

Así que:

$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \left[(n+1)^{m+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m+1}{j} \sum_{k=1}^{n} k^j\right]$

Ejercicio 3.3. *Utilice el resultado del ejercicio anterior para demostrar las siguientes relaciones:*

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

d) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

donde $n \in \mathbb{N}$.

Solución

a. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\left[(n+1)^2 - (n+1)\right] = \frac{1}{2}n(n+1)$

b. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - (n+1) - \sum_{J=1}^{1} \binom{3}{j} \sum_{k=1}^{n} k^j\right]$

$= \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - (n+1) - \binom{3}{1}\sum_{k=1}^{n} k\right] = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}\right]$

$= \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) = \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)$

c. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - (n+1) - \sum_{J=1}^{2}\binom{4}{j}\sum_{k=1}^{n} k^j\right]$

$= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - (n+1) - \binom{4}{1}\sum_{k=1}^{n} k - \binom{4}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right]$

$= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - (n+1) - 2n(n+1) - n\,(n+1)\,(2n+1)\right]$

$= \frac{1}{4}\left(n^4 + 2n^3 + n^2\right) = \frac{1}{4}n^2\,(n+1)^2$

d. $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - (n+1) - \sum_{J=1}^{3}\binom{5}{j}\sum_{k=1}^{n} k^j\right]$

$= \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - (n+1) - \binom{5}{1}\sum_{k=1}^{n} k - \binom{5}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \binom{5}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3\right]$

$= \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - (n+1) - \frac{5n(n+1)}{2} - \frac{5}{3}n\,(n+1)\,(2n+1) - \frac{5}{2}n^2\,(n+1)^2\right]$

$= \frac{1}{5}\left(n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n\right) = \frac{1}{30}n\,(n+1)\,(2n+1)\,(3n^2 + 3n - 1)$

Ejercicio 3.4. *De una población de N objetos, $b_1, \ldots, b_N$, se toma una muestra aleatoria ordenada sin reemplazo de tamaño n. Dado $k \in \{1, \ldots, N\}$, calcule la probabilidad de que b_k se encuentre en la muestra.*

Solución

Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, la probabilidad de que b_k sea seleccionado en el paso j es igual a $\frac{1}{N}$, así que la probabilidad buscada es $\frac{n}{N}$.

Ejercicio 3.5. *Se tienen* 2 *urnas, cada una de las cuales contiene* 10 *bolas numeradas del* 1 *al* 10*. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar al azar una bola de cada urna. Calcule la probabilidad de que los números de las dos bolas seleccionadas difieran por* 2 *o más.*

Solución

Definamos los eventos:

A: Los dos números de las bolas seleccionadas difieren por 2 o más.

B: Los dos números de las bolas seleccionadas difieren en 1.

C: Los dos números de las bolas seleccionadas son iguales.

Entonces:

$P(C) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; $P(B) = \frac{18}{100}$

$P(A) = 1 - P(B) - P(C) = 1 - \frac{28}{100} = \frac{18}{25}$

EJERCICIO 3.6. *Un experimento aleatorio consiste en lanzar* 3 *dados sobre una mesa, uno de los dados es rojo, otro azul y el otro blanco. a) ¿Cuál es la probabilidad de que los* 3 *números que se obtienen sean distintos? b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número que se obtiene con el dado azul sea igual a la suma de los números que se obtienen con los otros dos dados?*

Solución

a) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$

b) Definamos:

B: El número que se obtiene con el dado azul es igual a la suma de los números que se obtienen con los otros dos dados.

Cada posible resultado del lanzamiento de los tres dados se puede representar mediante una terna (a, r, b), en donde a denota el resultado que se obtiene con el dado azul, r el que se obtiene con el dado rojo y b el que se obtiene con el dado blanco.

Entonces:

$B = \{(2, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (4, 1, 3), (4, 2, 2), (4, 3, 1), (5, 1, 4),$

$(5, 2, 3), (5, 3, 2), (5, 4, 1), (6, 1, 5), (6, 2, 4), (6, 3, 3), (6, 4, 2), (6, 5, 1).\}$

Siendo equiprobables los posibles resultados del experimento aleatorio, se tiene:

$P(B) = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$.

EJERCICIO 3.7. *Una urna contiene* 8 *bolas rojas,* 7 *bolas negras y* 10 *bolas blancas. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y con reemplazo,* 3 *bolas de la urna. Calcule la probabilidad de que a) las* 3 *bolas seleccionadas sean del mismo color y b) por lo menos una de las bolas seleccionadas sea blanca.*

Solución

a) $\frac{8^3+7^3+10^3}{25^3} = \frac{371}{3125} = 0.1187$

b) $1 - \frac{15^3}{25^3} = \frac{98}{125} = 0.784$

EJERCICIO 3.8. 5 *personas suben a un elevador en la planta baja de un edificio de* 10 *pisos. Supongamos que cada persona puede bajar en cualquiera de los* 10 *pisos con la misma probabilidad. Calcule la probabilidad de que a) por lo menos una persona baje del elevador después del piso* 5 *y b) las* 5 *personas bajen del elevador en pisos distintos.*

Solución

a) $1 - \frac{5^5}{10^5} = \frac{31}{32} = 0.96875$

b) $\frac{(10)_5}{10^5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^5} = \frac{189}{625} = 0.3024$

EJERCICIO 3.9. *Sabiendo que al lanzar un par de dados se obtiene una suma igual a* 6*, ¿cuál es la probabilidad de que uno de los números que se obtienen sea el* 1*?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Se obtiene una suma igual a 6.

B: Uno de los números obtenidos es el 1.

Entonces:

$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(\{(1,5),(5,1)\})}{P(\{1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\})} = \frac{2}{5}$

EJERCICIO 3.10. *Un experimento aleatorio consiste en lanzar un par de dados. Sabiendo que como resultado del experimento se obtienen dos números distintos, ¿cuál es la probabilidad de que uno de esos números sea el* 4*?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Se obtienen dos números distintos.

B: Uno de los números es el 4.

Entonces:

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

EJERCICIO 3.11. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y con reemplazo, 2 bolas de una urna, la cual contiene 3 bolas blancas y 2 bolas negras. Si se sabe que las dos bolas seleccionadas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Las dos bolas seleccionadas son del mismo color.

B: Las dos bolas seleccionadas son blancas.

Entonces:

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2}{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{9}{13} = 0.692308$

EJERCICIO 3.12. *Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado 10 veces. Si se sabe que se obtiene por lo menos un 6, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos o más 6's?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Se obtiene por lo menos un 6.

B: Se obtienen dos o más 6's.

Entonces:

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{10}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^9}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}} = \frac{31169301}{50700551} = 0.614772$

EJERCICIO 3.13. *Un dado se lanza 10 veces. Suponiendo que en 6 ocasiones se obtiene un número entre 1 y 4 (inclusive), ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga por lo menos una vez el número 1?*

Solución

Definamos los eventos:

A: En 6 ocasiones se obtiene un número entre 1 y 4.

B: Se obtiene por lo menos una vez el número 1.

C: En 6 ocasiones se obtiene un número entre 2 y 4.

Primer método:

$P(B|A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3367}{4096} = 0.822021$

Segundo método:

$P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 1 - \frac{P(A\cap B^c)}{P(A)} = 1 - \frac{\binom{10}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^6\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^0}{\binom{10}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^6\left(\frac{2}{6}\right)^4} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6$

Tercer método:

$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)-P(A\cap B^c)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A\cap B^c)}{P(A)}$

Ejercicio 3.14. *Un dado es lanzado 3 veces. Si se sabe que se obtiene al menos una vez el número 6, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga exactamente una vez el número 6?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Se obtiene al menos una vez el número 6.

B: Se obtiene exactamente una vez el número 6.

Entonces:

$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{75}{91} = 0.824176$

Ejercicio 3.15. *Un dado se lanza 5 veces. Sabiendo que los 5 números que se obtienen son distintos, ¿cuál es la probabilidad de que entre ellos no esté el número 6?*

Solución

Definamos los eventos:

A: los 5 números que se obtienen son distintos.

B: no se obtiene el número 6.

Entonces:

$P(B \mid A) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$

EJERCICIO 3.16. *Se van colocando al azar bolas, una a una, en cualquiera de N cajas hasta que alguna caja llegue a tener 2 bolas.¿Cuál es la probabilidad de que el proceso termine en el paso n?*

Solución

Definamos los eventos:

A_n: el proceso termina en el paso n.

B_{n-1}: las primeras $n-1$ bolas quedan en cajas distintas.

C_n: la enésima bola queda en una caja ocupada.

Entonces, para $n \in \{2, \ldots, N+1\}$, se tiene:

$P(A_n) = P(B_{n-1} \cap C_n) = P(C_n \mid B_{n-1})P(B_{n-1}) = \frac{n-1}{N} \frac{N \cdots (N-n+2)}{N^{n-1}}$

EJERCICIO 3.17. *Se seleccionan, al azar y con reemplazo, 3 tarjetas de una urna que contiene N tarjetas numeradas del 1 al N. Encuentre la probabilidad de que el menor de los números seleccionados sea igual a 2.*

Solución

$\left(\frac{N-1}{N}\right)^3 - \left(\frac{N-2}{N}\right)^3$

EJERCICIO 3.18. *Se seleccionan, al azar y con reemplazo, 4 tarjetas de una urna que contiene N tarjetas numeradas del 1 al N. Encuentre la probabilidad de que el mayor de los números seleccionados sea igual a N.*

Solución

$1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^4$

EJERCICIO 3.19. *Se seleccionan, al azar y con reemplazo,* 10 *tarjetas de una urna que contiene* N *tarjetas numeradas del* 1 *al* N. *Encuentre la probabilidad de que a) el menor de los números seleccionados sea igual a* k *y b) el mayor de los números seleccionados sea igual a* k, *donde* $k \leq N$.

Solución

a. $\left(\frac{N-k+1}{N}\right)^{10} - \left(\frac{N-k}{N}\right)^{10}$

b. Definamos los eventos:

A_k: El mayor de los números seleccionados es menor o igual a k.

B_k: El mayor de los números seleccionados es igual a k.

Entonces:

$P(B_k) = P(A_k) - P(A_{k-1}) = \frac{k^{10}}{N^{10}} - \frac{(k-1)^{10}}{N^{10}}$

EJERCICIO 3.20. *Antonio y Luis forman parte de un grupo de* 12 *personas, las cuales ocupan al azar* 12 *sillas que se encuentren formando un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que queden exactamente* 4 *personas entre Antonio y Luis en el arco que va de Antonio a Luis en dirección positiva?*

Solución

$\frac{\binom{10}{4}4!6!12}{12!} = \frac{1}{11}$

EJERCICIO 3.21. *Antonio y Luis forman parte de un grupo de* n *personas* ($n > 2$), *las cuales ocupan al azar* n *sillas que se encuentren formando un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que a) Antonio y Luis queden sentados uno al lado del otro? y b) queden exactamente* k *personas entre Antonio y Luis?*

Solución

a. $\frac{2}{n-1}$

b. $\frac{2}{n-1}$, excepto si $n = 2k + 2$, en cuyo caso la probabilidad buscada es igual a $\frac{1}{n-1}$.

Ejercicio 3.22. *n personas se sientan al azar en n sillas alrededor de una mesa redonda. Encuentre la probabilidad de que las personas A, B y C queden juntas, con A a la derecha de B y C a la izquierda de B.*

Solución

$\frac{(n-3)!n}{n!} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$

Ejercicio 3.23. *Los números $1, \ldots, n$ ($n \geq 3$) se colocan uno después del otro en un orden aleatorio. Encuentre la probabilidad de que los números 1, 2 y 3 queden colocados juntos y ordenados en forma creciente.*

Solución

$\frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

Ejercicio 3.24. *Juan y Pedro forman parte de un grupo de 10 personas, las cuales ocupan al azar 10 sillas que se encuentran en hilera. ¿Cuál es la probabilidad de que queden exactamente 2 personas entre Juan y Pedro?*

Solución

Se trata de un muestreo sin reemplazo.

Total de posibles muestras ordenadas $= 10!$

Definamos:

A: Quedan exactamente 2 personas entre Juan y Pedro.

Entonces:

$P(A) = \frac{2 \cdot 7 \cdot (8)!}{10!} = \frac{7}{45}$

También se puede hacer el siguiente razonamiento para llegar al resultado:

Sin tomar en cuenta el orden, hay $\binom{10}{2}$ diferentes maneras en que pueden colocarse Juan y Pedro en los 10 lugares y todas ellas son equiprobables. De ellas hay 7 en las cuales quedan 2 personas entre Juan y Pedro. Por lo tanto:

$P(A) = \frac{7}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{45}$

Ejercicio 3.25. *5 hombres y 5 mujeres se sientan al azar en 10 sillas colocadas en hilera. Encuentre la probabilidad de que por lo menos una de las personas quede sentada junto a otra del mismo sexo.*

Solución

Definamos los eventos:

A: Por lo menos una persona queda sentada junto a otra del mismo sexo.

M_i: En el lugar i se sienta una mujer.

H_i: En el lugar i se sienta un hombre.

Entonces:

$P(A) = 1 - P(A^c)$

$= 1 - [P(M_1H_2M_3H_4M_5H_6M_7H_8M_9H_{10}) + P(H_1M_2H_3M_4H_5M_6H_7M_8H_9M_{10})]$

$= 1 - 2\frac{5!5!}{10!} = \frac{125}{126} = 0.99206$

Ejercicio 3.26. *Un tablero circular se divide en tres zonas acotadas por círculos concéntricos de radios $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ y 1, respectivamente. Si se hacen tres disparos al azar sobre el tablero, ¿cuál es la probabilidad de que cada zona reciba uno de los disparos?*

Solución

$3!\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{72}$

Ejercicio 3.27. *Cada una de n bolas se coloca al azar en una de n cajas. Encuentre la probabilidad de que exactamente una de las cajas quede vacía.*

Solución

Definamos los eventos:

A: Únicamente la caja 1 queda vacía.

A_i: Únicamente la caja 1 queda vacía y quedan dos bolas en la caja i ($i \in \{2, \ldots, n\}$).

B: Exactamente una de las cajas queda vacía.

Entonces:

$P(A_i) = \frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$

$P(A) = P(A_2) + \cdots + P(A_n) = \frac{(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}$

$P(B) = nP(A) = \frac{n\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}n!}{n^n}$

Ejercicio 3.28. *n bolas se encuentren colocadas en n cajas, una en cada caja. Un experimento consiste en sacar las bolas de la caja y en colocarlas después, al azar, nuevamente una en cada caja. Calcule la probabilidad de que al realizar el experimento, exactamente k bolas queden en las cajas en las que estaban originalmente.*

Solución

Definamos:

A_n: al realizar el experimento descrito, con n bolas y n cajas, ninguna bola queda en la caja en la que estaba originalmente.

Sabemos que:

$P(A_n) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$

Para $k \in \{0, \ldots, n\}$, consideremos k bolas específicas y definamos:

B_k: Las k bolas quedan en donde estaban originalmente.

C_{n-k}: De las restantes $n-k$ bolas, ninguna queda en donde estaba originalmente.

Entonces:

$P(B_k \cap C_{n-k}) = P(C_{n-k} \mid B_k) P(B_k)$

$= \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right)\frac{(n-k)!}{n!}$

Por otra parte, k bolas específicas se pueden seleccionar en un total de $\binom{n}{k}$ maneras, así que, si llamamos β_k a la probabilidad que se busca, se tiene:

$\beta_k = \binom{n}{k} P(B_k \cap C_{n-k})$

$= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right)\frac{(n-k)!}{n!}$

$= \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right)$

Otro método:

Para $j \in \mathbb{N}$, sea m_j el total de formas en que, al permutar j objetos, ninguno de ellos quede fijo y sea p_j la probabilidad de que esto ocurra. Sabemos que:

$\frac{m_j}{j!} = p_j = \sum_{i=2}^{j} (-1)^i \frac{1}{i!}$

Consideremos k bolas específicas y sea α_k la probabilidad de que únicamente esas k bolas queden fijas. Como esto ocurre cuando esas k bolas quedan fijas y ninguna de las otras queda fija, se tiene:

$\alpha_k = \frac{m_{n-k}}{n!}$

k bolas específicas se pueden seleccionar en un total de $\binom{n}{k}$ maneras, así que, si llamamos β_k a la probabilidad que se busca, se tiene:

$\beta_k = \binom{n}{k}\alpha_k = \binom{n}{k}\frac{m_{n-k}}{n!} = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!p_{n-k}}{n!} = \frac{p_{n-k}}{k!}$

$= \frac{1}{k!}\sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right)$

Ejercicio 3.29. 10 *parejas, formadas cada una por un hombre y una mujer, llegan a una fiesta y en ella se forman* 10 *nuevas parejas hombre-mujer al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que a) ninguna persona quede con la pareja que iba? y b) a lo más* 2 *parejas queden formadas como lo estaban originalmente?*

Solución

a. Definamos los eventos:

B_k: la mujer k queda con su pareja.

A: Ninguna persona queda con su pareja.

Entonces:

$P(B_1 \cup \cdots \cup B_{10}) = \sum_j P(B_j) - \sum_{i \neq j} P(B_i \cap B_j) + \cdots - P(B_1 \cap \cdots \cap B_{10})$

$= 10\frac{9!}{10!} - \binom{10}{2}\frac{8!}{10!} + \binom{10}{3}\frac{7!}{10!} - \cdots - \frac{1}{10!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{10!}$

$P(A) = 1 - P(B_1 \cup \cdots \cup B_{10}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{10!} \approx e^{-1}$

b. Para cada $k \in \{0, \ldots, n\}$, sea β_k la probabilidad de que exactamente k mujeres queden con su pareja original.

De acuerdo con el ejercicio anterior, se tiene:

$\beta_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{10-k}\frac{1}{(10-k)!}\right)$

Así que si definimos:

C: A lo más 2 parejas queden formadas como lo estaban originalmente

Entonces:

$P(C) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$

$= \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{10!}\right)$

$+ \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots - \frac{1}{9!}\right)$

$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!}\right)$

$= \frac{16481}{44800} + \frac{16687}{45360} + \frac{1}{2}\frac{2119}{5760} = \frac{1668703}{1814400} = 0.9197$

Ejercicio 3.30. *Una persona escribe n cartas dirigidas a n personas distintas, mete cada carta en un sobre y, finalmente, escribe al azar las direcciones de las n personas, una en cada sobre. Encuentre la probabilidad de que por lo menos una de las cartas llegue a la persona para quien fue escrita.*

Solución

Definamos:

A_k: la carta k llega a su destino.

Entonces:

$P(A_1 \cup \cdots \cup A_{10}) = \frac{n(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!}$

$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \approx 1 - e^{-1}$

Ejercicio 3.31. *Una urna contiene 4 bolas blancas, 4 rojas y 4 azules. Se van seleccionando bolas de la urna, una a una y sin reemplazo, hasta obtener en forma consecutiva dos bolas del mismo color, o hasta que se agoten las bolas de la urna. Encuentre la probabilidad de que este proceso termine en la quinta elección.*

Solución

Definamos los eventos:

C: El proceso termina en la quinta elección.

C_1: El proceso termina con la extracción de dos bolas azules.

C_2: El proceso termina con la extracción de dos bolas rojas.

C_3: El proceso termina con la extracción de dos bolas blancas.

Entonces:

$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)$

$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3)$

$P(C_1) = P(BRBAA) + P(RBRAA) + P(ARBAA) + P(ABRAA) + P(NANAA)$

$= 2\left(\frac{3}{8}\frac{4}{9}\frac{3}{10}\frac{4}{11}\frac{4}{12}\right) + 2\left(\frac{2}{8}\frac{3}{9}\frac{4}{10}\frac{4}{11}\frac{4}{12}\right) + \frac{2}{8}\frac{3}{9}\frac{7}{10}\frac{4}{11}\frac{8}{12} = \frac{17}{495}$

Así que:

$P(C) = 3\left(\frac{17}{495}\right) = \frac{17}{165} = 0.10303$

Ejercicio 3.32. *Tres urnas contienen bolas blancas y negras; la primera* 2 *blancas y* 3 *negras, la segunda* 2 *blancas y* 2 *negras y la tercera* 3 *blancas y* 1 *negra. Se transfiere una bola de la primera a la segunda urna, después una de la segunda a la tercera y, finalmente, una de la tercera a la primera, siendo todas las transferencias al azar. ¿Qué composición de bolas en la primera urna, después de las transferencias, es la más probable?*

Solución

Sea X el número de bolas blancas en la primera urna después de las transferencias.

$P[X = 1] = P(BBN) + P(BNN) = \frac{1}{5}\frac{3}{5}\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\frac{2}{5}\frac{2}{5} = \frac{14}{125}$

$P[X = 2] = P(BBB) + P(BNB) + P(NBN) + P(NNN)$

$= \frac{4}{5}\frac{3}{5}\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{3}{5} = \frac{60}{125}$

$P[X = 3] = P(NBB) + P(NNB) = \frac{4}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\frac{3}{5}\frac{3}{5} = \frac{51}{125}$

Ejercicio 3.33. *Una urna contiene r bolas rojas y b bolas blancas. Se elige al azar una bola de la urna, después, sin reemplazar la primera, se elige otra y así sucesivamente hasta sacar n bolas. Calcule la probabilidad de que en el j-ésimo paso se saque una bola roja sabiendo que la muestra contiene s bolas rojas.*

Solución

Primer método:

Sean $a_1, \ldots, a_r$ las bolas rojas y $a_{r+1}, \ldots, a_{r+b}$ las bolas blancas. Denotemos entonces por t_k al total de muestras ordenadas sin reemplazo de tamaño n las cuales contienen s bolas rojas específicas, denotadas por $a_1, \ldots, a_s$, y $n-s$ bolas blancas específicas, denotadas por $a_{s+1}, \ldots, a_n$, y para las cuales la bola k se elige en el j-ésimo paso y por t al total de muestras ordenadas sin reemplazo de tamaño n las cuales contienen $a_1, \ldots, a_s$. Se tiene entonces $C = t_1 = \cdots = t_n$ y $t = t_1 + \cdots + t_n$, así que:

$$P(R_j) = \frac{(t_1+t_2+\cdots+t_s)\binom{r}{s}\binom{b}{n-s}}{t\binom{r}{s}\binom{b}{n-s}} = \frac{Cs}{Cn} = \frac{s}{n}$$

Segundo método:

Definamos los eventos:

A: La muestra contiene s bolas rojas.

B: La j-ésima bola seleccionada es roja.

Entonces:

$$P(A) = \frac{\binom{r}{s}\binom{b}{n-s}}{\binom{r+b}{n}}$$

$$P(B \cap A) = \frac{(r-1)\cdots(r-s+2)rb(b-1)\cdots(b-n+s+1)\binom{n-1}{s-1}}{(r+b)(r+b-1)\cdots(r+b-n+1)} = \frac{\binom{r}{s-1}\binom{b}{n-s}(r-s+1)}{\binom{r+b}{n}n}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{r}{s-1}\binom{b}{n-s}(r-s+1)}{\binom{r+b}{n}n} \frac{\binom{r+b}{n}}{\binom{r}{s}\binom{b}{n-s}} = \frac{s}{n}$$

Tercer método:

$$P(A) = \frac{\binom{r}{s}\binom{b}{n-s}}{\binom{r+b}{n}}$$

$$P(B) = \frac{r}{r+b}$$

$P(A \mid B) = \frac{\binom{r-1}{s-1}\binom{b}{n-s}}{\binom{r+b-1}{n-1}}$

$P(B \mid A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{\binom{r-1}{s-1}\binom{b}{n-s}}{\binom{r+b-1}{n-1}} \frac{r}{r+b} \frac{\binom{r+b}{n}}{\binom{r}{s}\binom{b}{n-s}} = \frac{\binom{r-1}{s-1}}{\binom{r+b-1}{n-1}} \frac{r}{r+b} \frac{\binom{r+b}{n}}{\binom{r}{s}} = \frac{s}{n}$

Ejercicio 3.34. *En una urna hay N tarjetas numeradas del 1 al N. Se van seleccionando al azar las tarjetas de la urna, una a una y sin reemplazo, hasta que se seleccionan todas. Para $k \in \{1, \ldots, N\}$, sea A_k el evento 'el número de la k-ésima tarjeta seleccionada es mayor que los números de las seleccionadas previamente'. Encuentre la probabilidad de cada evento A_k y demuestre que los eventos $A_1, \ldots, A_n$ son independientes.*

Solución

Las primeras k tarjetas pueden ser seleccionadas en un total de $\binom{N}{k}k!$ maneras. De éstas, aquellas en las cuales ocurre el evento A_k son un total de $\binom{N}{k}(k-1)!$, así que:

$P(A_k) = \frac{\binom{N}{k}(k-1)!}{\binom{N}{k}k!} = \frac{1}{k}$

Dados $k_1 < \cdots < k_r$, si el evento $A_{k_{i+1}} \cap \cdots \cap A_{k_r}$ ocurre, entonces de las primeras k_{i+1} tarjetas seleccionadas, la mayor es la última. Las primeras k_i tarjetas de estas k_{i+1} pueden seleccionarse en un total de $\binom{k_{i+1}}{k_i}k_i!$ maneras. De éstas, aquellas en las cuales ocurre el evento A_{k_i} son un total de $\binom{k_{i+1}}{k_i}(k_i-1)!$, así que:

$P(A_{k_i} \mid A_{k_{i+1}} \cap \cdots \cap A_{k_r}) = \frac{\binom{k_{i+1}}{k_i}(k_i-1)!}{\binom{k_{i+1}}{k_i}k_i!} = \frac{1}{k_i}$

Por lo tanto:

$P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_r})$

$= P(A_{k_1} \mid A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_r})P(A_{k_2} \mid A_{k_3} \cap \cdots \cap A_{k_r}) \cdots P(A_{k_{r-1}} \mid A_{k_r})P(A_{k_r})$

$= \frac{1}{k_1} \cdots \frac{1}{k_r} = P(A_{k_1}) \cdots P(A_{k_r})$

Ejercicio 3.35. *Una urna contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. Se seleccionan 2 bolas, al azar y sin reemplazo. Encuentre la probabilidad de que los dos números de las bolas seleccionadas difieran por 3 o más.*

Solución

Definamos los eventos:

A: Los dos números de las bolas seleccionadas difieren en 1.

B: Los dos números de las bolas seleccionadas difieren en 2.

C: Los dos números de las bolas seleccionadas difieren por 3 o más.

Entonces:

$P(A) = \frac{19}{190} = \frac{1}{10}$

$P(B) = \frac{18}{190} = \frac{9}{95}$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{9}{95} = \frac{153}{190} = 0.805263$

EJERCICIO 3.36. *Se eligen al azar dos números del conjunto* $\{1, \ldots n\}$*. Encuentre la probabilidad de que uno de los números seleccionados sea menor que* k *y el otro sea mayor que* k*, donde* $1 < k < n$.

Solución

$\frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{2}}$

EJERCICIO 3.37. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y sin reemplazo,* 3 *bolas de una urna, la cual contiene* 6 *bolas blancas y* 4 *bolas negras. Si se sabe que las tres bolas seleccionadas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Las tres bolas seleccionadas son del mismo color.

B: Las tres bolas seleccionadas son blancas.

Entonces:

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{6}{3} + \binom{4}{3}} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

Ejercicio 3.38. *De una urna que contiene* 6 *bolas blancas y* 4 *bolas rojas se seleccionan, sin reemplazo,* 4 *bolas al azar y se transfieren a una segunda urna, la cual se encuentre vacía. Inmediatamente después, se seleccionan, al azar y sin reemplazo, dos bolas de la segunda urna. Sabiendo que entre las* 4 *bolas que se transfieren hay por lo menos* 2 *blancas, calcule la probabilidad de que las dos bolas seleccionadas de la segunda urna sean ambas blancas.*

Solución

Definamos los eventos:

A: Entre las 4 bolas que se transfieren hay por lo menos 2 blancas.

B: las dos bolas seleccionadas de la segunda urna son ambas blancas.

A_k: Entre las 4 bolas que se transfieren hay exactamente k blancas.

Entonces:

$$P\left(B \mid A\right) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+P(B\cap A_4)}{P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)} = \frac{P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)+P(B|A_4)P(A_4)}{P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)}$$

$$= \frac{\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{1}}{\binom{10}{4}}+\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}}\frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}}}{\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}}+\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{1}}{\binom{10}{4}}+\frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}}} = \frac{14}{37} = 0.378378$$

Ejercicio 3.39. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y sin reemplazo,* 3 *bolas de una urna, la cual contiene* 6 *bolas negras y* 4 *bolas blancas. Si se sabe que al menos una de las bolas seleccionadas es negra, ¿cuál es la probabilidad de que las* 3 *sean negras?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Al menos una de las bolas seleccionadas es negra.

B: Las 3 bolas seleccionadas son negras.

Entonces:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\binom{6}{3}/\binom{10}{3}}{1-\binom{4}{3}/\binom{10}{3}} = \frac{5}{29} = 0.172414$$

Ejercicio 3.40. *De una urna que contiene 4 bolas rojas y 6 blancas se seleccionan, al azar y sin reemplazo, dos bolas; inmediatamente después se selecciona al azar una de las bolas restantes. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera bola seleccionada sea roja si se sabe que entre las dos primeras hay por lo menos una roja?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Entre las dos primeras bolas hay por lo menos una roja.

A_1: Entre las dos primeras bolas hay exactamente una roja.

A_2: Entre las dos primeras bolas hay exactamente dos rojas.

B: La tercera bola seleccionada es roja

Entonces:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)}{P(A_1) + P(A_2)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}{P(A_1) + P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{2}{8}\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}}}{\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}}} = \frac{7}{20}$$

Ejercicio 3.41. *Cada una de dos urnas contiene N bolas numeradas del 1 al N. De cada una de las cajas se toma una muestra de tamaño n sin reemplazo. Calcule la probabilidad de obtener exactamente k bolas con el mismo número.*

Solución

$$\frac{\binom{N}{k}}{\binom{N}{n}\binom{N}{n}}$$

Ejercicio 3.42. *Cada una de N personas estaciona su automóvil en uno de N lugares consecutivos para ser atendidos en una oficina. El automóvil de una persona A no queda en ninguno de los extremos y antes de A son atendidas n personas, cada una de las cuales retira su auto. Asumiendo que las N personas son atendidas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que a) A encuentre desocupados los dos lugares contiguos a su auto? y b) A encuentre ocupados los dos lugares contiguos a su auto?*

Solución

Definamos los eventos:

A: A tiene el turno $n+1$.

B: Entre las primeras n personas atendidas están las dos contiguas a A.

C: Entre las primeras n personas atendidas no están las dos contiguas a A.

a. $P(B \mid A) = \frac{\binom{N-3}{n-2}\binom{2}{2}}{\binom{N-1}{n}} = \frac{n(n-1)}{(N-1)(N-2)} = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{N-1}{2}}$

$P(B \cap A) = \frac{\binom{N-3}{n-2}n!}{\binom{N}{n+1}(n+1)!} = \frac{\binom{N-3}{n-2}}{\binom{N}{n+1}(n+1)} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)(N-2)}$

$P(A) = \frac{\binom{N-1}{n}n!}{\binom{N}{n+1}(n+1)!} = \frac{\binom{N-1}{n}}{\binom{N}{n+1}(n+1)} = \frac{1}{N}$

$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{N-3}{n-2}}{\binom{N-1}{n}} = \frac{n(n-1)}{(N-1)(N-2)}$

b. $P(C \mid A) = \frac{\binom{N-3}{n}}{\binom{N-1}{n}} = \frac{(N-n-1)(N-n-2)}{(N-1)(N-2)}$

Ejercicio 3.43. *Pedro es un arquero y se sabe que, al disparar una flecha, la probabilidad de que ésta de en el blanco es igual a* $\frac{9}{10}$. *Si Pedro realiza* 6 *lanzamientos de manera independiente, a) ¿cuál es la probabilidad de que acierte en el blanco por lo menos una vez? b) Sabiendo que, de los* 6 *disparos, acierta en el blanco por lo menos una vez, ¿cuál es la probabilidad de que acierte en el blanco por lo menos dos veces?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Acierta en el blanco por lo menos una vez.

B: Acierta en el blanco por lo menos dos veces.

a) $P(A) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^6 = 0.999999$

b) $P(B) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^5 = 0.999945$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.999945}{0.999999} = 0.999946$

Ejercicio 3.44. *Una urna contiene* 6 *bolas rojas y* 4 *bolas blancas. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y con reemplazo,* 20 *bolas de la urna. Encuentre la probabilidad de que se obtengan por lo menos* 4 *bolas rojas en la muestra.*

Solución

Definamos:

A: Se obtienen por lo menos 4 bolas rojas en la muestra.

Entonces:

$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \left(\frac{6}{10}\right)^k \left(\frac{4}{10}\right)^{20-k} = 0.99995$

Ejercicio 3.45. *Una urna contiene* 8 *tarjetas marcadas con números positivos y* 10 *tarjetas marcadas con números negativos. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y con reemplazo,* 4 *tarjetas de la urna. Encuentre la probabilidad de que el producto de los* 4 *números que se obtienen sea positivo.*

Solución

$\left(\frac{8}{18}\right)^4 + \left(\frac{10}{18}\right)^4 + \binom{4}{2} \left(\frac{8}{18}\right)^2 \left(\frac{10}{18}\right)^2 = \frac{3281}{6561} = 0.500076$

Ejercicio 3.46. *Calcule la probabilidad de obtener exactamente k veces* 6 *en n lanzamientos de un dado.*[1]

Solución

$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$

Ejercicio 3.47. *Un lote contiene n artículos. Si se sabe que r artículos son defectuosos y se inspeccionan uno por uno en un orden aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que el k-ésimo artículo ($k \geq r$) inspeccionado sea el último defectuoso en el lote?*

Solución

Definamos los eventos:

[1] Este problema fue uno de los primeros problemas de probabilidad que se plantearon. En las primeras soluciones no era evidente la relación que había con el desarrollo de un binomio, ésta fue encontrada más tarde. Gracias a esta relación, este tipo de probabilidades adquirió una gran importancia en el desarrollo posterior de la Teoría de la Probabilidad como puede verse en el capítulo siguiente y actualmente sigue siendo uno de los tipos principales.

A: Entre los primeros $k-1$ artículos hay $r-1$ defectuosos.

B: El k-ésimo inspeccionado es defectuoso.

Entonces:

$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = \frac{1}{n-k+1} \frac{\binom{r}{r-1}\binom{n-r}{k-r}}{\binom{n}{k-1}}$

Ejercicio 3.48. *Una urna contiene* 8 *bolas rojas,* 7 *bolas negras y* 10 *bolas blancas. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y sin reemplazo,* 3 *bolas de la urna. a) Calcule la probabilidad de que las* 3 *bolas seleccionadas sean del mismo color. b) Calcule la probabilidad de que por lo menos una de las bolas seleccionadas sea blanca.*

Solución

a) $\frac{\binom{8}{3}+\binom{7}{3}+\binom{10}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{56+35+120}{2300} = \frac{211}{2300} = 0.0917$

b) $1 - \frac{\binom{15}{3}}{\binom{25}{3}} = 1 - \frac{455}{2300} = \frac{1845}{2300} = 0.8022$

Ejercicio 3.49. *De una urna que contiene* 10 *bolas rojas,* 10 *bolas negras y* 10 *bolas blancas, se seleccionan* 2 *bolas al azar y sin reemplazo. Calcule la probabilidad de que las dos bolas seleccionadas sean de distinto color.*

Solución

$1 - \frac{3\binom{10}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{20}{29}$

Otro método:

$3\frac{10 \cdot 10}{\binom{30}{2}} = \frac{20}{29}$

Ejercicio 3.50. *Una urna contiene* 6 *tarjetas marcadas con números positivos y* 8 *tarjetas marcadas con números negativos. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y sin reemplazo,* 4 *tarjetas de la urna. Encuentre la probabilidad de que el producto de los* 4 *números que se obtienen sea positivo.*

Solución

$$\frac{\binom{6}{4}+\binom{6}{2}\binom{8}{2}+\binom{8}{4}}{\binom{14}{4}} = \frac{505}{1001} = 0.5045$$

EJERCICIO 3.51. *Una urna contiene* 16 *bolas rojas y* 14 *bolas blancas. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y sin reemplazo,* 10 *bolas de la urna. Encuentre la probabilidad de que se obtengan a lo más* 4 *bolas rojas.*

Solución

$$\frac{\binom{14}{10}+\binom{16}{1}\binom{14}{9}+\binom{16}{2}\binom{14}{8}+\binom{16}{3}\binom{14}{7}+\binom{16}{4}\binom{14}{6}}{\binom{30}{10}} = \frac{2591}{10005} = 0.25897$$

EJERCICIO 3.52. *En una fábrica hay* 35 *trabajadores por contrato, de los cuales* 20 *laboran en el turno matutino y* 40 *con definitividad, de los cuales* 25 *laboran en el turno matutino. En una asamblea de todos los trabajadores se forma una comisión eligiendo* 6 *personas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que queden representados en la comisión los* 4 *sectores de trabajadores?*

Solución

$$\frac{\binom{20}{3}\binom{15}{1}\binom{25}{1}\binom{15}{1}}{\binom{75}{6}} + \frac{\binom{20}{1}\binom{15}{3}\binom{25}{1}\binom{15}{1}}{\binom{75}{6}} + \frac{\binom{20}{1}\binom{15}{1}\binom{25}{3}\binom{15}{1}}{\binom{75}{6}} + \frac{\binom{20}{1}\binom{15}{1}\binom{25}{1}\binom{15}{3}}{\binom{75}{6}}$$

$$+\frac{\binom{20}{2}\binom{15}{2}\binom{25}{1}\binom{15}{1}}{\binom{75}{6}} + \frac{\binom{20}{2}\binom{15}{1}\binom{25}{2}\binom{15}{1}}{\binom{75}{6}} + \frac{\binom{20}{2}\binom{15}{1}\binom{25}{1}\binom{15}{2}}{\binom{75}{6}}$$

$$+\frac{\binom{20}{1}\binom{15}{2}\binom{25}{2}\binom{15}{1}}{\binom{75}{6}} + \frac{\binom{20}{1}\binom{15}{2}\binom{25}{1}\binom{15}{2}}{\binom{75}{6}} + \frac{\binom{20}{1}\binom{15}{1}\binom{25}{2}\binom{15}{2}}{\binom{75}{6}}$$

$$= \frac{505250}{1342397} = 0.37638$$

EJERCICIO 3.53. *En una rifa se reparten* n *boletos, de los cuales* m *obtendrán algún premio. Encuentre la probabilidad de que una persona que tiene* k *boletos obtenga por lo menos un premio.*

Solución

$$1 - \frac{\binom{n-m}{k}}{\binom{n}{k}}$$

EJERCICIO 3.54. *Un grupo de $2N$ niños y $2N$ niñas se divide en dos grupos de $2N$ personas cada uno. Encuentre la probabilidad de que cada grupo contenga el mismo número de niños que de niñas.*

Solución

$\frac{\binom{2N}{N}\binom{2N}{N}}{\binom{4N}{2N}}$

EJERCICIO 3.55. *Una urna contiene 4 bolas rojas, 6 bolas negras y 8 bolas blancas. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y sin reemplazo, 4 bolas de la urna. Calcule la probabilidad de que se obtengan por lo menos 2 bolas blancas en la muestra.*

Solución

Definamos:

A: Se obtienen por lo menos 2 bolas blancas en la muestra.

Entonces:

$P(A) = \sum_{k=2}^{4} \frac{\binom{8}{k}\binom{10}{4-k}}{\binom{18}{4}} = \frac{21}{34} = 0.61765$

CAPÍTULO 4

COMBINANDO LAS REGLAS BÁSICAS

Ejercicio 4.1. *Una urna contiene* 2 *bolas blancas y* 4 *bolas rojas, una segunda urna contiene* 3 *bolas blancas y* 2 *bolas rojas y una tercera urna contiene* 4 *bolas blancas y* 5 *bolas rojas. Se elige una bola al azar de la primera urna y se transfiere a la segunda; después de esto, se selecciona al azar una bola de la segunda urna y se transfiere a la tercera; finalmente se selecciona al azar una bola de la tercera urna. Calcule la probabilidad de que la bola que se obtiene finalmente sea roja.*

Solución

Definamos los eventos:

R_1: La bola seleccionada de la primera urna es roja.

B_1: La bola seleccionada de la primera urna es blanca.

R_2: La bola seleccionada de la segunda urna es roja.

B_2: La bola seleccionada de la segunda urna es blanca.

R: La bola que se obtiene finalmente es roja.

Entonces:

$P(R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|B_1)P(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{9}$

$P(B_2) = P(B_2|R_1)P(R_1) + P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{9}$

$P(R) = P(R|R_2)P(R_2) + P(R|B_2)P(B_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{49}{90} = 0.544$

Ejercicio 4.2. *Una urna contiene* 2 *bolas blancas y* 8 *bolas rojas, una segunda urna contiene* 4 *bolas blancas y* 4 *bolas rojas. Se eligen, al azar y sin reemplazo,* 2 *bolas de la primera urna y se transfieren a la segunda; después de esto, se selecciona al azar* *una bola de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola que se obtiene finalmente sea roja.*

Solución

$P(R) = P(R \mid RR)P(RR) + P(R \mid RB)P(RB) + P(R \mid BB)P(BB)$

$= \frac{6}{10}\frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{5}{10}\frac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{4}{10}\frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{14}{25} = 0.56$

Ejercicio 4.3. *De una urna que contiene* 6 *bolas blancas y* 4 *bolas rojas se seleccionan, sin reemplazo,* 6 *bolas al azar y se transfieren a una segunda urna, la cual se encuentra vacía. Inmediatamente después, se seleccionan, al azar y sin reemplazo,* 4 *bolas de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que entre las 4 bolas seleccionadas de la segunda urna haya exactamente* 2 *blancas.*

Solución

Definamos los eventos:

B: entre las 4 bolas seleccionadas de la segunda urna hay exactamente 2 blancas.

A_k: Entre las 6 bolas que se transfieren hay exactamente k blancas.

Entonces:

$P(B) = P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3) + P(B \mid A_4)P(A_4)$

$= \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{2}}{\binom{6}{4}}\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{4}}{\binom{10}{6}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}}{\binom{6}{4}}\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{3}}{\binom{10}{6}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{\binom{6}{4}}\frac{\binom{6}{4}\binom{4}{2}}{\binom{10}{6}} = \frac{3}{7}$

Ejercicio 4.4. *De una urna que contiene* 6 *bolas blancas y* 4 *bolas rojas se seleccionan, sin reemplazo,* 4 *bolas al azar y se transfieren a una segunda urna, la cual se encuentre vacía. Inmediatamente después, se seleccionan, al azar y sin reemplazo, dos bolas de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que las dos bolas seleccionadas de la segunda urna sean ambas blancas.*

Solución

Definamos los eventos:

A: Entre las 4 bolas que se transfieren hay por lo menos 2 blancas.

B: las dos bolas seleccionadas de la segunda urna son ambas blancas.

A_k: Entre las 4 bolas que se transfieren hay exactamente k blancas.

Entonces:

$P(B) = P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3) + P(B \mid A_4)P(A_4)$

$= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{1}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}} \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{3}$

Ejercicio 4.5. *Una urna contiene* 8 *bolas blancas y* 2 *bolas rojas, una segunda urna contiene* 5 *bolas blancas y* 5 *bolas rojas y una tercera urna contiene* 3 *bolas blancas y* 5 *bolas rojas. Se elige* 1 *bola al azar de cada una de las dos primeras urnas y se transfieren a la tercera; después de esto, se seleccionan al azar* 2 *bolas de la tercera urna. Calcule la probabilidad de que las dos bolas seleccionadas de la tercera urna sean ambas blancas.*

Solución

Definamos los eventos:

R_1: La bola seleccionada de la primera urna es roja.

B_1: La bola seleccionada de la primera urna es blanca.

R_2: La bola seleccionada de la segunda urna es roja.

B_2: La bola seleccionada de la segunda urna es blanca.

B: Las dos bolas seleccionadas de la tercera urna son ambas blancas.

Entonces:

$P(B) = P(B|B_1B_2)P(B_1B_2) + P(B|B_1R_2)P(B_1R_2)$

$+P(B|R_1B_2)P(R_1B_2) + P(B|R_1R_2)P(R_1R_2)$

$= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{8}{10} \frac{5}{10} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{8}{10} \frac{5}{10} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{2}{10} \frac{5}{10} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{2}{10} \frac{5}{10} = \frac{73}{450} = 0.162222$

Ejercicio 4.6. *Una urna contiene* 4 *bolas rojas y* 6 *blancas; una segunda contiene* 6 *bolas rojas y* 2 *blancas y una tercera contiene* 3 *bolas rojas y* 5 *blancas. Un experimento aleatorio consiste en elegir al azar una de las urnas y, después de eso, en elegir al* *azar una bola de la urna elegida. Sabiendo que la bola seleccionada no proviene de la tercera urna, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?*

Solución

$P(R) = P(R \mid I)P(I) + P(R \mid II)P(II) = \frac{4}{10}\frac{1}{2} + \frac{6}{8}\frac{1}{2} = \frac{23}{40} = 0.575$

EJERCICIO 4.7. *Una urna contiene r bolas rojas y b bolas blancas. Se elige al azar una bola de la urna, después, sin reemplazar la primera, se elige otra y así sucesivamente hasta sacar todas las bolas. Utilizando la regla de la probabilidad total y mediante un razonamiento de inducción, demuestre que la probabilidad de que en el j-ésimo paso se saque una bola roja es igual a $\frac{r}{r+b}$.*

Solución

Sea R_n el evento 'la bola seleccionada en el paso n es roja'. Se va entonces a demostrar que, cualquiera que sea la configuración de bolas en la urna, $P(R_n)$ es igual a la proporción inicial de bolas rojas para cualquier $n \in \{1, \dots, r+b\}$.

Para $n = 1$, el resultado es inmediato. Supongamos ahora que el resultado es cierto para $n = k$, con $k < r + b$, entonces:

$P(R_{k+1}) = P(R_{k+1} \mid R_1)P(R_1) + P(R_{k+1} \mid R_1^c)P(R_1^c)$

$= \frac{r-1}{r+b-1}\frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+b-1}\frac{b}{r+b} = \frac{r(r+b-1)}{(r+b-1)(r+b)} = \frac{r}{r+b}$

EJERCICIO 4.8. *Consideremos una población formada por familias en las cuales hay a lo más 5 hijos, de tal manera que los porcentajes de familias con 0, 1, 2 ,3, 4 y 5 hijos están dados por 5%, 15%, 30%, 25%, 20% y 5%, respectivamente. Supongamos además que la probabilidad de que un hijo sea varón es igual a 0.5. Al seleccionar una familia al azar de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que todos los hijos sean varones sabiendo que a) hay al menos un hijo varón? y b) la familia tiene por lo menos un hijo?*

Solución

Definamos los eventos:

A: La familia seleccionada tiene al menos un hijo varón.

B: Todos los hijos de la familia seleccionada son varones.

C : La familia seleccionada tiene por lo menos un hijo.

H_j: La familia seleccionada tiene j hijos.

a. $P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B|H_1)P(H_1)+\cdots+P(B|H_5)P(H_5)}{P(A|H_1)P(H_1)+\cdots+P(A|H_5)P(H_5)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{15}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{30}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{25}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{20}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{5}{100}}{\left[1-\frac{1}{2}\right]\frac{15}{100}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{30}{100}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\frac{25}{100}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]\frac{20}{100}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]\frac{5}{100}} = \frac{125}{483} = 0.258799$$

b. $P(B \mid C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{P(B\cap C|H_1)P(H_1)+\cdots+P(B\cap C|H_5)P(H_5)}{1-P(H_0)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{15}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{30}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{25}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{20}{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{5}{100}}{\frac{95}{100}} = \frac{125}{608} = 0.205592$$

EJERCICIO 4.9. *Se tienen* 3 *cartas; una de ellas es roja de ambos lados, la segunda es roja de un lado y blanca del otro y la tercera es blanca de ambos lados. Se elige al azar una de las cartas y se coloca sobre una mesa. Sabiendo que el color que muestra la carta seleccionada es rojo, ¿cuál es la probabilidad de que del otro lado también sea roja?*

Solución

$$P(RR \mid R) = \frac{P(R|RR)P(RR)}{P(R|RR)P(RR)+P(R|RB)P(RB)+P(R|BB)P(BB)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

EJERCICIO 4.10. *Se tienen* 4 *escritorios, cada uno con dos cajones. Los dos primeros escritorios contienen una moneda de oro en cada cajón, el tercero contiene una moneda de plata en cada cajón y el cuarto contiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro. Se elige un escritorio al azar, se abre un cajón al azar y después el otro. Si en el primer cajón se encuentra una moneda de oro, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo cajón también contenga una moneda de oro?*

Solución

Definamos los eventos:

A_i: Se elige el escritorio i.

A: El primer cajón que se abre contiene una moneda de oro

B: El segundo cajón contiene una moneda de oro.

Entonces:

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A_1 \cup A_2)}{P(A|A_1)P(A_1)+P(A|A_2)P(A_2)+P(A|A_3)P(A_3)+P(A|A_4)P(A_4)}$

$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$

Ejercicio 4.11. *La probabilidad de que un documento se encuentre en alguno de los* 8 *cajones de un escritorio es igual a* p*. Si el documento se encuentra en el escritorio, es igualmente probable que se encuentre en cualquiera de sus* 8 *cajones. Se busca el documento en* 7 *de los cajones y no se encuentre. Calcule la probabilidad de encontrarlo en el octavo cajón.*

Solución

Definamos los eventos:

A: El documento no se encuentra en los primeros 7 cajones.

B: El documento se encuentra en el octavo cajón.

C: El documento se encuentra en el escritorio.

Entonces:

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B|C)P(C)+P(A \cap B|C^c)P(C^c)}{P(A|C)P(C)+P(A|C^c)P(C^c)} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)p}{\left(\frac{1}{8}\right)p+(1-p)} = \frac{p}{8-7p}$

Ejercicio 4.12. *Una urna contiene* 2 *bolas blancas y* 8 *bolas rojas, una segunda urna contiene* 4 *bolas blancas y* 4 *bolas rojas. Se eligen, al azar y sin reemplazo,* 2 *bolas de la primera urna y se transfieren a la segunda; después de esto, se seleccionan, al azar y sin reemplazo,* 3 *bolas de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que entre estas últimas haya bolas de los dos colores.*

Solución

Definamos:

A: Entre las 3 últimas bolas hay bolas de los dos colores.

Entonces:

$P(A) = P(A \mid 2 \text{ rojas})P(2 \text{ rojas}) + P(A \mid 2 \text{ blancas})P(2 \text{ blancas})$

$+P(A \mid 1 \text{ roja y } 1 \text{ blanca})P(1 \text{ roja y } 1 \text{ blanca})$

$$= \frac{6\binom{4}{2}+4\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{4\binom{6}{2}+6\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} \frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{5\binom{5}{2}+5\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} \frac{16}{\binom{10}{2}} = \frac{548}{675} = 0.811852$$

Ejercicio 4.13. *Una urna contiene* 2 *bolas blancas y* 1 *negra; otra urna contiene* 1 *bola blanca y* 5 *bolas negras. Una bola elegida al azar es transferida de la primera urna a la segunda y, después de ésto, se extrae al azar una bola de esta última. Calcule la probabilidad de que la bola que se transfiere sea negra bajo la hipótesis de que en la extracción resulta bola blanca.*

Solución

Definamos los eventos:

B: en la extracción resulta bola blanca.

A_1: la bola transferida es negra.

A_2: la bola transferida es blanca.

Entonces:

$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{1}{5}$

Ejercicio 4.14. *Se selecciona al azar una bola de una urna, la cual contiene* 3 *bolas rojas y* 6 *blancas. Si la bola seleccionada es blanca, se devuelve a la urna, mientras que si es roja, no se devuelve. Inmediatamente después se elige al azar otra bola de la urna. Si se sabe que la segunda bola seleccionada es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?*

Solución

$P(R_1 \mid R_2) = \frac{P(R_2|R_1)P(R_1)}{P(R_2)} = \frac{P(R_2|R_1)P(R_1)}{P(R_2|R_1)P(R_1)+P(R_2|B_1)P(B_1)} = \frac{\frac{2}{8}\frac{3}{9}}{\frac{2}{8}\frac{3}{9}+\frac{3}{9}\frac{6}{9}} = \frac{3}{11} = 0.272727$

Ejercicio 4.15. *Se selecciona al azar una bola de una urna, la cual contiene* 10 *bolas rojas y* 5 *bolas negras. Si la bola seleccionada es roja, se regresa a la urna, mientras que si es negra, la bola seleccionada se regresa a la urna junto con dos bolas negras más. a) Calcule la probabilidad de que una segunda bola que se seleccione al azar de la urna sea negra. b) Si al seleccionar una segunda bola al azar se obtiene una bola negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola que se selecciona también sea negra?*

Solución

Definamos los eventos:

A: La primera bola es roja.

B: La primera bola es negra.

C: La segunda bola es negra.

a. $P(C) = P(C \mid A)P(A) + P(C \mid B)P(B) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} + \frac{7}{17} \cdot \frac{5}{15} = \frac{55}{153} = 0.359477$

b. $P(B \mid C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{17} \cdot \frac{5}{15}}{\frac{55}{153}} = \frac{21}{55} = 0.381818$

Ejercicio 4.16. *De una urna que contiene* 3 *bolas rojas y* 6 *bolas blancas se selecciona al azar una bola y se regresa a la urna junto con* 3 *bolas más del mismo color; inmediatamente después se selecciona al azar otra bola de la urna. Sabiendo que la segunda bola seleccionada es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?*

Solución

Definamos los eventos:

A: La primera bola seleccionada es roja.

B: La segunda bola seleccionada es roja.

Entonces:

$P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

Ejercicio 4.17. *Se tienen dos urnas, la primera contiene* 3 *bolas blancas y* 4 *bolas rojas, mientras que la segunda contiene* 6 *bolas blancas y* 3 *bolas rojas. Un experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda balanceada una vez; si se obtiene cara, se selecciona al azar una bola de la primera urna, si se obtiene cruz, se selecciona al azar una bola de la segunda urna. Sabiendo que finalmente se obtiene una bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga cara al lanzar la moneda?*

Solución

Definamos:

B: Se selecciona una bola blanca.

C: Se obtiene cara al lanzar la moneda.

Entonces:

$P(C \mid B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)} = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B|C)P(C)+P(B|C^c)P(C^c)} = \frac{\frac{3}{7}\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}\frac{1}{2}+\frac{6}{9}\frac{1}{2}} = \frac{9}{23} = 0.391304$

Ejercicio 4.18. *Una moneda desbalanceada está hecha de tal forma que la probabilidad de obtener cara es el doble de la probabilidad de obtener cruz. Un experimento aleatorio consiste en lanzar dicha moneda una vez, si se obtiene cara, se selecciona al azar una bola de una urna que contiene* 9 *bolas blancas y* 3 *bolas rojas, mientras que si se obtiene cruz, se selecciona al azar una bola de otra urna que contiene* 4 *bolas blancas y* 8 *bolas rojas. a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga finalmente una bola roja? b) Supongamos que como resultado del experimento se obtiene finalmente una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que en la primera parte de éste se obtenga cruz al lanzar la moneda?*

Solución

a. $P(R) = P(R\, |\text{Cara})P(\text{Cara}) + P(R\, |\text{Cruz})P(\text{Cruz}) = \frac{3}{12}\cdot\frac{2}{3} + \frac{8}{12}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{18} = 0.38889$

b. $P(\text{Cruz}|\, R) = \frac{P(R|\text{Cruz})P(\text{Cruz})}{P(R)} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7} = 0.57143$

Ejercicio 4.19. *En una cierta población, el* 70% *de los individuos son hombres y el* 30% *son mujeres. Se sabe que el* 40% *de los hombres de esa población fuma, mientras que de las mujeres lo hace el* 60%. *a) Si se seleccionada al azar una persona de dicha población, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona fume? b) Si se observa que un individuo de dicha población está fumando, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona sea una mujer?*

Solución

a. $P(F) = P(F \mid H)P(H) + P(F \mid M)P(M) = (0.4)(0.7) + (0.6)(0.3) = 0.46$

b. $P(M \mid F) = \frac{P(F|M)P(M)}{P(F)} = \frac{(0.6)((0.3)}{0.46} = 0.3913$

Ejercicio 4.20. *Una compañía de seguros estima que en una cierta población, el* 30% *de los individuos son propensos a tener accidentes. Estima además que la probabilidad de que una persona propensa a tener dicho accidente lo tenga realmente, en un periodo de un año, es igual a* 0.4, *mientras que esta probabilidad se reduce a* 0.2 *para las* *personas no propensas. a) ¿Cuál es la probabilidad de que un nuevo asegurado tenga un accidente durante el primer año de la póliza?. Si un asegurado tiene un accidente durante el primer año de la póliza, ¿cuál es la probabilidad de que b) esa persona sea propensa a tener un accidente? y c) el asegurado tenga un accidente durante el segundo año de la póliza?*

Solución

Definamos los eventos.

A: El asegurado es propenso a tener un accidente.

C: El asegurado tiene un accidente durante el primer año.

D: El asegurado tiene un accidente durante el segundo año.

a. $P(C) = P(C \mid A)P(A) + P(C \mid A^c)P(A^c)$

$= (0.4)(0.3) + (0.2)(0.7) = 0.26$

b. $P(A \mid C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{(0.4)((0.3)}{0.26} = 0.4615$

c. $P(D) = P(D \mid A)P(A \mid C) + P(D \mid A^c)P(A^c \mid C)$

$= (0.4)(0.4615) + (0.2)(0.5385) = 0.2923$

Ejercicio 4.21. *Un estudiante presenta un examen de opción múltiple en el cual cada pregunta tiene* 5 *posibles respuestas, de las cuales únicamente una es la correcta. Si el estudiante conoce la respuesta correcta, esa es la que selecciona, en otro caso selecciona al azar una de las* 5 *posibles respuestas. Supongamos que el estudiante conoce la respuesta correcta de* 70 % *de las preguntas. Dada una pregunta que es contestada correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante conozca la respuesta correcta?*

Solución

Definamos los eventos:

A: la respuesta es conocida.

B: la pregunta es contestada correctamente.

Entonces:

$P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{0.7}{0.7+(0.2)(0.3)} = 0.92105$

EJERCICIO 4.22. *Un bolso contiene* 3 *monedas, una de las cuales está acuñada con dos caras mientras que las otras dos monedas son normales (cara de un lado, cruz del otro). Se escoge al azar una moneda del bolso y se lanza* 4 *veces en forma sucesiva. Sabiendo que se obtiene cara en las* 4 *ocasiones que se lanza la moneda, ¿cuál es la probabilidad de que se seleccione la moneda con dos caras?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Se selecciona la moneda con dos caras.

B: Se obtiene cara en cada uno de los 4 lanzamientos de la moneda seleccionada.

Entonces:

$P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{8}{9} = 0.88889$

EJERCICIO 4.23. *En una fábrica hay dos máquinas, A y B, las cuales producen el* 40% *y el* 60% *respectivamente de la producción total. Se sabe que la máquina A produce aproximadamente* 3% *de artículos defectuosos, mientras que la máquina B produce aproximadamente* 5% *de artículos defectuosos. Encuentre la probabilidad de que un determinado artículo defectuoso sea producido por la máquina A.*

Solución

$P(A \mid D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)} = \frac{(0.03)(0.4)}{(0.03)(0.4)+(0.05)(0.6)} = 0.28571$

EJERCICIO 4.24. *La probabilidad de que cada artículo producido por una máquina satisfaga el estándar es igual a* 0.96*. Cuando un artículo satisface el estándar, la probabilidad de que pase el sistema de inspección es igual a* 0.98*, mientras que cuando no lo satisface la probabilidad es de* 0.05*. Dado que un artículo pasa el sistema de inspección, ¿cuál es la probabilidad de que satisfaga el estándar?*

Solución

Definamos los eventos:

A: El artículo seleccionado satisface el estándar.

B: El artículo seleccionado pasa el sistema de inspección.

Entonces:

$P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{(0.98)(0.96)}{(0.98)(0.96)+(0.05)(0.04)} = 0.99788$

EJERCICIO 4.25. *Supongamos que una prueba de sangre de una cierta enfermedad contagiosa es tal que las probabilidades de un falso negativo y de un falso positivo son ambas iguales a* 0.01*. Supongamos además que la probabilidad de que una persona elegida al azar esté contagiada es igual a* p*. ¿Para qué valores de* p*, están contagiadas más del* 90% *de la personas para las cuales la prueba resulta positiva?*

Solución

Definamos los eventos:

A: La persona seleccionada está contagiada.

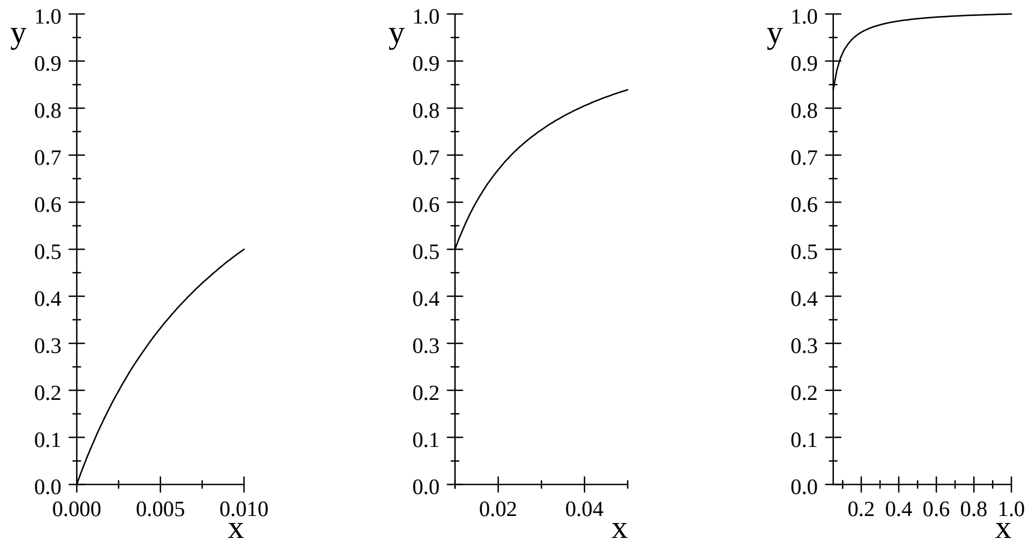
B: La prueba resulta positiva.

Se sabe entonces que $P(B^c \mid A) = 0.01$, $P(B \mid A^c) = 0.01$ y $P(A) = p$. Por lo tanto:

$P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{0.99p}{0.99p+0.01(1-p)} = \frac{0.99p}{0.98p+0.01}$

$P(A \mid B) > 0.9 \Longleftrightarrow \frac{0.99p}{0.98p+0.01} > 0.9 \Longleftrightarrow p > \frac{1}{12} = 0.0833$

La gráfica de la función $f(p) = \frac{0.99p}{0.98p+0.01}$ se muestra a continuación para diferentes rangos de valores de p.



Ejercicio 4.26. *En un juicio, se está demandando a un hombre pensión alimenticia para un niño, por ser el supuesto padre; sin embargo, el demandado asegura no ser el padre del niño. El abogado de la demandante argumenta que se ha encontrado en el niño una característica genética que pose el padre, la cual se presenta únicamente en el* 1% *de la población adulta y, cuando está presente, se transmite con seguridad de padre a hijo. El abogado añade que, a priori no se sabe si el hombre demandado es el padre del niño, de manera que la probabilidad de que lo sea es igual a* $\frac{1}{2}$*, pero, dado que se ha encontrado en el niño la característica genética que posee el hombre, la probabilidad de que el demandado sea realmente el padre del niño es casi igual a* 1*. a) Encuentre la probabilidad cercana a* 1 *a la cual hace referencia el abogado. b) ¿Qué se podría argumentar en contra del razonamiento que hace el abogado de la demandante? c) Supongamos que, antes de disponer de la información sobre la presencia en el niño de la característica genética que posee el hombre, el juez había determinado que la probabilidad de que el hombre sea el padre del niño es igual a* p*. ¿Cuál es la nueva probabilidad* P *de que el hombre sea el padre del niño que determinaría el juez una vez que dispone de la nueva información? d) Para* $0 \leq p \leq 0.1$*, grafique* P *como función de* p*. e) Determine los valores de* p *para los cuales* P *resulta cercana a* 1 *(tómese como cercana a* 1 *una probabilidad mayor que* 0.99*).*

Solución

Definamos los eventos:

A: El demandado es el padre del niño.

B: El niño tiene la característica genética que posee el demandado.

Entonces:

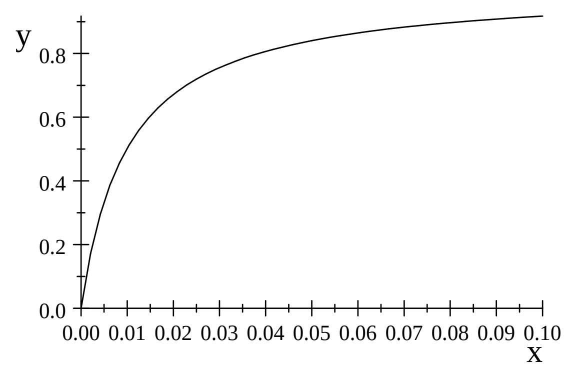
$P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{p}{p+0.01(1-p)}$

a. $P(A \mid B) = \frac{0.5}{0.5+0.01(0.5)} = \frac{1}{1.01} = 0.9901$

b. No hay razón para decir, a priori, que la probabilidad de que el hombre demandado sea el padre del niño es igual a $\frac{1}{2}$.

c. $P(A \mid B) = \frac{p}{p+0.01(1-p)} = \frac{p}{0.99p+0.01}$

d.



e. $\frac{p}{0.99p+0.01} > 0.95$ cuando $p > 0.15966$.

$\frac{p}{0.99p+0.01} > 0.99$ cuando $p > 0.49749$.

EJERCICIO 4.27. *Un médico llegó a la conclusión de que la probabilidad de que su paciente, Fernando Flores, padezca una cierta enfermedad es igual a* 0.6. *El médico sigue una regla según la cual cuando la probabilidad de que un paciente padezca dicha enfermedad es* 0.8 *o más entonces recomienda cirugía, pero si la probabilidad es menor a* 0.8 *entonces recomienda estudios adicionales, los cuales son costosos y dolorosos. Por tal motivo, el médico recomienda al Sr. Flores hacerse un estudio, resultando positivo. Dicho estudio tiene la característica de resultar positivo en todos los casos en que la persona padece la enfermedad y negativo en los casos en que la persona no padece la enfermedad y el resultado del estudio no es alterado por otros padecimientos del paciente. El resultado del estudio indicaba al médico que debe de recomendar cirugía, sin embargo, después de realizado el estudio, el Sr. Flores informa al médico que padece de diabetes, lo cual no había contemplado el médico hasta ese momento.*

Esta información pone en duda al médico pues el estudio que le practicaron al Sr. Flores resulta positivo en 30 % de los casos en que el paciente no padece la enfermedad pero es diabético. ¿Qué debo recomendar?, se pregunta el médico, ¿otro estudio o cirugía?

Solución

Definamos los eventos:

A: El Sr. Flores padece la enfermedad.

B: El estudio resulta positivo.

Entonces:

$P(A) = 0.6$

$P(B \mid A) = 1$

$P(B \mid A^c) = 0.3$

$P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{.6}{0.6+(0.3)(0.4)} = 0.8333$

Así que el médico debe de recomendar cirugía.

EJERCICIO 4.28. *Un dado desbalanceado está hecho de tal forma que la probabilidad de obtener el número k es igual a ck, donde c es una constante y $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Un experimento aleatorio consiste en lanzar dicho dado; si se obtiene como resultado el número k, se lanza una moneda balanceada k veces. Dado que al lanzar la moneda se obtiene por lo menos una cara, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga el número 2 al lanzar el dado?*

Solución

Definamos los eventos:

A: Se obtiene por lo menos una cara.

B_j: Se obtiene el número j.

Entonces:

$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1)+\cdots+P(A|B_6)P(B_6)}$

$$= \frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{2}{21}}{\frac{1}{2}\frac{1}{21}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{2}{21}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\frac{3}{21}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]\frac{4}{21}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]\frac{5}{21}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]\frac{6}{21}}$$

$$= \frac{2}{21}\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{42}+\frac{2}{21}\frac{3}{4}+\frac{1}{7}\frac{7}{8}+\frac{4}{21}\frac{15}{16}+\frac{5}{21}\frac{31}{32}+\frac{2}{7}\frac{63}{64}} = \frac{4}{51} = 0.0784314$$

EJERCICIO 4.29. *Un dado balanceado es lanzado* 5 *veces. Después de cada lanzamiento se coloca en una urna A una bola blanca cuando el resultado es el número* 6 *y una bola roja cuando el resultado no es el número* 6*. Inmediatamente después, se seleccionan, al azar y con reemplazo,* 3 *bolas de la urna. Dado que las* 3 *bolas seleccionadas son blancas, ¿cuál es la probabilidad de que la urna contenga únicamente bolas blancas?*

Solución

Definamos los eventos:

A_j: Se obtiene j veces el número 6.

B: Las 3 bolas seleccionadas son blancas.

Entonces:

$$P(A_5 \mid B) = \frac{P(B|A_5)P(A_5)}{P(B)} = \frac{P(B|A_5)P(A_5)}{P(B|A_3)P(A_3)+P(B|A_4)P(A_4)+P(B|A_5)P(A_5)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^5}{\left(\frac{3}{5}\right)^3\binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3\binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^5} = \frac{5}{339} = 0.0147493$$

EJERCICIO 4.30. *Se tienen dos urnas, la primera contiene* 4 *bolas rojas y* 6 *bolas blancas, mientras que la segunda contiene* 8 *rojas y* 2 *blancas. Se seleccionan, al azar y sin reemplazo,* 2 *bolas de la primera urna y se transfieren a la segunda. Inmediatamente después, se seleccionan, al azar y sin reemplazo,* 2 *bolas de la segunda urna. Sabiendo que finalmente se obtienen* 2 *bolas blancas, ¿cuál es la probabilidad de que se transfieran* 2 *bolas blancas de la primera urna a la segunda?*

Solución

Definamos los eventos:

A_1: Se transfieren 2 bolas blancas.

A_2: Se transfieren 2 bolas rojas.

A_3: Se transfiere 1 bola blanca y 1 roja.

B: Se obtienen finalmente 2 bolas blancas.

Entonces:

$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)$

$= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{12}{2}} \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{33} + \frac{1}{495} + \frac{4}{165} = \frac{28}{495}$

$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{33}}{\frac{28}{495}} = \frac{15}{28} = 0.53571$

Ejercicio 4.31. *Una moneda balanceada es lanzada* 5 *veces. En cada lanzamiento se coloca en una urna una bola blanca cuando el resultado es cara y una bola roja cuando el resultado es cruz. En seguida se sacan con reemplazo n bolas de la urna. Calcule la probabilidad de que la urna contenga únicamente bolas blancas bajo la hipótesis de que las n bolas extraídas son blancas.*

Solución

Definamos los eventos:

A_k: Se obtienen k caras al lanzar la moneda 5 veces.

B: Las n bolas seleccionadas son blancas.

Entonces:

$P(A_5 \mid B) = \frac{P(B|A_5)P(A_5)}{P(B)} = \frac{P(A_5)}{\sum_{k=0}^{5} P(B|A_k)P(A_k)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{k}{5}\right)^n \binom{5}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{k}{5}\right)^n \binom{5}{k}}$

Se puede encontrar una cota inferior para esta probabilidad; en efecto:

$\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{k}{5}\right)^n \binom{5}{k} = \sum_{k=0}^{5} \left(1 - \frac{k}{5}\right)^n \binom{5}{k}$

Pero:

$\left(1 - \frac{k}{5}\right)^n < e^{-\frac{nk}{5}}$ $(1 - x < e^{-x}\text{si } x \leq 1)$

Por lo tanto:

$\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{k}{5}\right)^n \binom{5}{k} < \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} e^{-\frac{nk}{5}} = \left(1 + e^{-\frac{n}{5}}\right)^5$

Así que:

$P(A_5 \mid B) > \left(1 + e^{-\frac{n}{5}}\right)^{-5}$

Se ve así, como era de esperarse, que cuando n es muy grande esta probabilidad es cercana a 1.

Ejercicio 4.32. *Supongamos que disponemos de* 5 *urnas de tal manera que* 4 *de ellas contienen* 3 *bolas rojas y* 3 *bolas blancas cada una, mientras que la quinta contiene* 5 *bolas blancas y* 1 *bola roja. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y sin reemplazo,* 3 *bolas de una de las* 5 *urnas, la cual se selecciona también al azar. Sabiendo que las* 3 *bolas seleccionadas son blancas, ¿cuál es la probabilidad de que se seleccione la urna con* 5 *bolas blancas?*

Solución

Definamos los eventos:

A: se selecciona la urna con 5 bolas blancas.

B: las 3 bolas seleccionadas son blancas.

Entonces:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{5}{3}}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{\binom{5}{3}}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{5} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5}{7} = 0.71429$$

CAPÍTULO 5

LA ADITIVIDAD NUMERABLE

EJERCICIO 5.1. *Resuelva los ejemplos 5.11 y 5.12 siguiendo el método de Huygens, es decir, utilizando probabilidades condicionales.*

Solución

Ejemplo 5.11 Tres personas, P, Q y R, colocan doce fichas en una urna, 4 de ellas son blancas y 8 negras. Juegan sacando por turnos una ficha al azar de la caja, reemplazándola después y con la condición de que el primero que saque una ficha blanca gana el juego. Suponiendo que el primer turno es de P, el segundo de Q y el tercero de R, calcule las probabilidades que cada jugador tiene de ganar.

Definamos los eventos:

A: P gana el juego.

B: Q gana el juego.

C: R gana el juego.

A_1: P gana el juego en su primer turno.

B_1: Q gana el juego en su primer turno.

C_1: R gana el juego en su primer turno.

Entonces:

$P(A) = P(A_1) + P(A \cap A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c) = P(A_1) + P(A \mid A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c) P(A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c)$

$= P(A_1) + P(A) P(A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c) = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 P(A)$

Así que, $P(A) = \frac{9}{19}$.

$P(B) = P(A_1^c \cap B_1) + P(B \cap A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c)$

$= P(A_1^c \cap B_1) + P(B \mid A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c)P(A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c)$

$= \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 P(B)$

Así que, $P(B) = \frac{6}{19}$.

$P(C) = P(A_1^c \cap B_1^c \cap C_1) + P(C \cap A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c)$

$= P(A_1^c \cap B_1^c \cap C_1) + P(C \mid A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c)P(A_1^c \cap B_1^c \cap C_1^c)$

$= \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 P(C)$

Así que, $P(C) = \frac{4}{19}$.

Ejemplo 5.12 Tres jugadores, P, Q y R, juegan partidas por parejas en cada una de las cuales la probabilidad que cada jugador tiene de ganar es $\frac{1}{2}$; quien gane una partida juega con el otro jugador hasta que uno de los jugadores gane dos partidas consecutivas, ganando entonces el juego. Suponiendo que comienzan jugando P contra Q, calcule las probabilidades que cada uno tiene de ganar el juego.

Definamos los eventos:

A: P gana el juego.

B: Q gana el juego.

C: R gana el juego.

P_k: P gana la k-ésima partida.

Q_k: Q gana la k-ésima partida.

R_k: R gana la k-ésima partida.

Entonces:

$P(C) = P(P_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(Q_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(C \cap P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4)$

$+P(C \cap Q_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4)$

$= 2P(P_1 \cap R_2 \cap R_3) + 2P(C \cap P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4)$

$= \frac{1}{4} + 2P(C \mid P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4)P(P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}P(C)$

Así que, $P(C) = \frac{2}{7}$.

$P(B) = P(A) = P(P_1 \cap P_2) + P(A \cap P_1 \cap R_2 \cap Q_3) + P(A \cap Q_1 \cap R_2)$

$= \frac{1}{4} + P(A \mid P_1 \cap R_2 \cap Q_3)P(P_1 \cap R_2 \cap Q_3) + P(A \mid Q_1 \cap R_2)P(Q_1 \cap R_2)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}P(C) + \frac{1}{4}P(C) = \frac{5}{14}$

Otro método:

$P(C) = P(P_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(Q_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(C \cap P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4)$

$+P(C \cap Q_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4)$

$= 2P(P_1 \cap R_2 \cap R_3) + 2P(C \cap P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4)$

$= \frac{1}{4} + 2P(C \mid P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4)P(P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}P(C)$

Así que, $P(C) = \frac{2}{7}$.

Sea D el evento 'ninguno de los jugadores gana el juego', entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$P(D) \leq P(P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4 \cap R_5 \cap Q_6 \cap \cdots \cap P_{3n-2} \cap R_{3n-1} \cap Q_{3n})$

$+P(Q_1 \cap R_2 \cap P_3 \cap Q_4 \cap R_5 \cap P_6 \cap \cdots \cap Q_{3n-2} \cap R_{3n-1} \cap P_{3n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-1}$

Así que, $P(D) = 0$.

Por lo tanto, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ y entonces:

$P(B) = P(A) = \frac{1}{2}\left[1 - P(C)\right] = \frac{5}{14}$

Otro método:

$P(A \mid P_1) = P(P_2 \mid P_1) + P(A \cap R_2 \mid P_1)$

$= \frac{1}{2} + P(A \mid P_1 \cap R_2)P(R_2 \mid P_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(B \mid P_1)$

$P(B \mid P_1) = P(B \cap R_2 \mid P_1) = P(B \mid A_1 \cap R_2)P(R_2 \mid P_1) = \frac{1}{2}P(C \mid P_1)$

$P(C \mid P_1) = P(C \cap R_2 \mid P_1) = P(C \mid A_1 \cap R_2)P(R_2 \mid A_1) = \frac{1}{2}P(A \mid P_1)$

Así que:

$P(A \mid P_1) = \frac{4}{7}$

$P(B \mid P_1) = \frac{1}{7}$

$P(C \mid P_1) = \frac{2}{7}$

$P(A) = P(A \cap P_1) + P(A \cap Q_1) = P(A \mid P_1)P(P_1) + P(A \mid Q_1)P(Q_1)$

$= P(A \mid P_1)P(P_1) + P(B \mid P_1)P(Q_1) = \frac{1}{2}P(A \mid P_1) + \frac{1}{2}P(B \mid P_1) = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14}$

$P(B) = P(A) = \frac{5}{14}$

$P(C) = P(C \cap P_1) + P(C \cap Q_1) = 2P(C \cap P_1) = 2P(C \mid P_1)P(P_1) = P(C \mid P_1) = \frac{2}{7}$

Otro método:

$P(A) = P(A \cap P_1) + P(A \cap Q_1) = P(A \mid P_1)P(P_1) + P(A \mid Q_1)P(Q_1)$

$P(A \mid P_1) = P(P_2 \mid P_1) + P(A \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4 \mid P_1)$

$= \frac{1}{2} + P(A \mid P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4)P(R_2 \cap Q_3 \cap P_4 \mid P_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}P(A \mid P_1)$

Así que, $P(A \mid P_1) = \frac{4}{7}$.

$P(A \mid Q_1) = P(A \cap R_2 \cap P_3 \mid Q_1) = P(A \mid Q_1 \cap R_2 \cap P_3)P(R_2 \cap P_3 \mid Q_1)$

$= \frac{1}{4}P(A \mid P_1) = \frac{1}{7}$

Por lo tanto:

$P(A) = \frac{4}{7}\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

$P(B) = P(A) = \frac{5}{14}$

$P(C) = P(C \cap P_1) + P(C \cap Q_1) = 2P(C \cap P_1) = 2P(C \mid P_1)P(P_1) = P(C \mid P_1)$

$= P(C \cap R_2 \mid P_1) = P(C \mid P_1 \cap R_2)P(R_2 \mid P_1) = \frac{1}{2}P(A \mid P_1) = \frac{2}{7}$

Otro método:

$P(A) = P(A \cap P_1) + P(A \cap Q_1 \cap R_2 \cap P_3)$

$= P(A \mid P_1)P(P_1) + P(A \mid Q_1 \cap R_2 \cap P_3)P(Q_1 \cap R_2 \cap P_3)$

$= \frac{1}{2}P(A \mid P_1) + \frac{1}{8}P(A \mid P_1) = \frac{5}{8}P(A \mid P_1)$

$P(A) = P(P_1 \cap P_2) + P(A \cap P_1 \cap R_2 \cap Q_3 \cap P_4) + P(A \cap Q_1 \cap R_2 \cap P_3)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16}P(A \mid P_1) + \frac{1}{8}P(A \mid P_1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}P(A \mid P_1)$

Así que, $P(A \mid P_1) = \frac{4}{7}$ y $P(A) = \frac{5}{14}$.

$P(B) = P(A) = \frac{5}{14}$

$P(C) = P(C \cap P_1) + P(C \cap Q_1) = 2P(C \cap P_1) = 2P(C \cap P_1 \cap R_2)$

$= 2P(C \mid P_1 \cap R_2)P(P_1 \cap R_2) = \frac{1}{2}P(A \mid P_1) = \frac{2}{7}$

Ejercicio 5.2. *Muestre que los siguientes problemas caen dentro de la categoría de problemas descritos en la proposición 5.9 y encuentre las probabilidades que se piden.*

a) Dos jugadores, A y B, juegan a lanzar sucesivamente un par de dados, con la condición de que A ganará el juego en el momento en que obtenga 6 *puntos, mientras que B lo ganará en el momento en que obtenga* 7 *puntos. A tiene el primer turno y después, comenzando con B, cada uno de ellos tendrá dos oportunidades consecutivas de ganar. ¿Qué probabilidad tiene cada jugador de ganar el juego?*[1]

b) Tres jugadores, A, B y C, juegan un juego consistente en seleccionar, por turnos, una ficha, al azar y con reemplazo, de una caja que contiene 4 *fichas blancas y* 8 *negras. Si el ganador es el primero que obtenga una ficha blanca, ¿qué probabilidad tiene cada jugador de ganar el juego?*[2]

Solución

a. Para cada lanzamiento, definamos como éxito al hecho de que el jugador que lanza los dados gana el juego en ese lanzamiento. De esta forma, los ensayos se pueden clasificar en dos tipos: los ensayos en donde tira A de tipo T_1, con probabilidad de éxito $p_1 = \frac{5}{36}$ y los ensayos en donde tira B de tipo T_2, con probabilidad de éxito $p_2 = \frac{1}{6}$. Definiendo $t_1 = 1$ y $t_2 = 1$, el juego se acaba cuando, para alguna $i \in \{1, 2\}$, se obtienen t_i éxitos en los ensayos de tipo T_i.

Cada posible resultado de este juego puede representarse ya sea mediante una sucesión finita $(F, \ldots, F, S)$ formada por fracasos consecutivos seguidos de un éxito, o bien mediante una sucesión infinita $(F, F, \ldots)$ formada exclusivamente por fracasos.

$P(A) = p_1 + p_1((1-p_1)(1-p_2)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(1-p_1)^{2k}(1-p_2)^{2k}$

$+p_1((1-p_1)^2(1-p_2)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(1-p_1)^{2k}(1-p_2)^{2k}$

$= p_1 + p_1((1-p_1)(1-p_2)^2 \frac{1}{1-(1-p_1)^2(1-p_2)^2} + p_1((1-p_1)^2(1-p_2)^2 \frac{1}{1-(1-p_1)^2(1-p_2)^2} = 0.33059$

en donde p_1, p_2 son las probabilidades, respectivamente, de obtener 6 y 7 puntos al lanzar el par de dados, es decir $p_1 = \frac{5}{36}$ y $p_2 = \frac{1}{6}$.

[1] Este problema fue propuesto a Huygens por P.Fermat en junio de 1656.

[2] Este problema fue propuesto por C. Huygens en su libro.

b. Para cada elección de la ficha, definamos como éxito al hecho de obtener una ficha blanca. De esta forma, los ensayos son de un sólo tipo, con probabilidad de éxito $p = \frac{1}{3}$. El juego se acaba cuando se obtiene un éxito.

$$P(A) = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^6 \frac{1}{3} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{9}{19}$$

$$P(B) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^6 \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \cdots = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{6}{19}$$

$$P(C) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \cdots = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{4}{19}$$

EJERCICIO 5.3. *Demuestre que en el problema de la ruina del jugador, si $a + b > 3$, entonces Ω^I no es numerable.*

Solución

Problema de la ruina del jugador: dos jugadores, A y B, los cuales poseen, respectivamente, a y b fichas, juegan partidas consecutivas en cada una de las cuales las probabilidades de que A y B ganen son, respectivamente, p y $q = 1-p$ y de tal manera que en cada una de ellas el perdedor dará una de sus fichas al vencedor. El ganador del juego es aquel que en algún momento llegue a poseer la totalidad de fichas.

El experimento aleatorio asociado con este problema puede verse como la realización de una sucesión de ensayos de Bernoulli de tal forma que se obtiene éxito en el i-ésimo ensayo si el jugador A gana la i-ésima partida. El experimento se termina cuando uno de los dos jugadores posee la totalidad de las fichas.

Si $a = 1$, Ω^I contiene a todas las sucesiones que comienzan con un éxito seguido de parejas éxito-fracaso o fracaso-éxito, es decir, sucesiones de la forma:

$(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, \ldots)$

De la misma manera, si $b = 1$, Ω^I contiene a todas las sucesiones que comienzan con un fracaso seguido de parejas éxito-fracaso o fracaso-éxito. Finalmente, si tanto a como b son mayores que 1, entonces Ω^I contiene a todas las sucesiones formadas de parejas éxito-fracaso o fracaso-éxito.

Pero el conjunto de sucesiones formadas de parejas éxito-fracaso o fracaso-éxito representa al conjunto de números reales en el intervalo $[0, 1]$ que, escritos en base 4, únicamente utilizan el 2 (10) y el 1 (01) en su expansión. Este conjunto es no numerable pues, asociando la pareja 01 con 1 y la pareja 10 con 0, se puede poner en correspondencia con todos los números del intervalo $[0,1]$ escritos en base 2.

EJERCICIO 5.4. *Demuestre que en el problema de la ruina del jugador:*

$\sum_{\{\omega\in\Omega^F\}} p(\omega) = 1$

Solución

Para cada $j \in \{1,\dots,a+b-1\}$, consideremos el problema de la ruina del jugador en donde los jugadores A y B comienzan con j y $a+b-j$ fichas, respectivamente. Denotemos por $\mathcal{E}_j$ al experimento aleatorio asociado con ese juego y por Ω_j al espacio muestral de $\mathcal{E}_j$.

Demostraremos que $\sum_{\left\{\omega\in\Omega_j^F\right\}} p(\omega) = 1$ para cualquier $j \in \{1,\dots,a+b-1\}$.

Definamos $\Omega_0^F = \Omega_{a+b}^F = \phi$, $S_0 = S_{a+b} = 1$, y, para $j \in \{1,\dots,a+b-1\}$, $S_j = \sum_{\left\{\omega\in\Omega_j^F\right\}} p(\omega)$. Entonces, Para $j \in \{1,\dots,a+b-1\}$, se tiene:

$\Omega_j^F = \{(0,s_1,\dots s_n) : (s_1,\dots s_n) \in \Omega_{j-1}^F\} \cup \{(1,s_1,\dots s_n) : (s_1,\dots s_n) \in \Omega_{j+1}^F\}$

Por lo tanto:

$S_j = qS_{j-1} + pS_{j+1}$

Esto establece una ecuación en diferencias. Para resolverla la escribiremos en la siguiente forma equivalente, la cual se obtiene escribiendo $S_j = S_j(p+q)$:

$q(S_j - S_{j-1}) = p(S_{j+1} - S_j)$

De aquí se sigue:

$S_{j+1} - S_j = \left(\frac{q}{p}\right)^j (S_1 - S_0)$

Así que:

$S_j - S_0 = \sum_{i=1}^{j}(S_i - S_{i-1}) = (S_1 - S_0)\sum_{i=0}^{j-1}(\frac{q}{p})^i$, para $j \in \{1,\dots,a+b\}$.

Pero $S_{a+b} = S_0$, así que, $S_1 - S_0 = 0$, lo cual implica $S_j = S_0 = 1$ para cualquier $j \in \{1,\dots,a+b-1\}$.

EJERCICIO 5.5 (**Problema de los N jugadores**). *N jugadores, $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_N$, compiten por parejas de tal manera que en cada competencia cada uno de ellos tiene una probabilidad de ganar igual a $\frac{1}{2}$. Primero A_1 compite contra A_2 y el ganador compite contra A_3; el nuevo ganador compite contra A_4, etc. El ganador del juego es el primer jugador que logre vencer a los otros $N-1$ jugadores de forma consecutiva.*

El experimento aleatorio $\mathcal{E}$ asociado con este problema puede verse como la realización de una sucesión de ensayos de Bernoulli $B_1, B_2, \ldots$, en donde B_1 es éxito si el jugador P gana la primera partida y, para $i \geq 1$, B_{i+1} es éxito si el jugador que ganó la i-ésima partida gana también la que sigue. Con estas convenciones, el juego se termina en el momento en que se obtienen, por primera vez, $N-2$ éxitos consecutivos después del primer ensayo.

El espacio muestral Ω de $\mathcal{E}$ puede descomponerse en dos subconjuntos Ω^F y Ω^I, en donde Ω^F es el conjunto de resultados de las sucesiones finitas de ensayos de Bernoulli que terminan con la primera ocurrencia de $N-2$ éxitos consecutivos después del primer ensayo y Ω^I es el conjunto de resultados de las sucesiones infinitas de ensayos de Bernoulli para las cuales nunca se obtienen $N-2$ éxitos consecutivos después del primer ensayo. Como antes, cada elemento de Ω^F puede representarse mediante una sucesión finita $(s_1, \ldots, s_n)$ de 0's y 1's y cada elemento de Ω^I puede representarse mediante una sucesión infinita $(s_1, s_2, \ldots)$ de 0's y 1's, en donde $s_i = 0$ y $s_i = 1$ representa, respectivamente, un fracaso y un éxito en el i-ésimo ensayo. Además, si $\omega = (s_1, \ldots, s_n)$ es una colección finita de 0's y 1's, definimos $p(\omega) = \frac{1}{2^n}$.

Demuestre que:

a) Si $N \geq 4$, entonces Ω^I no es numerable.

b) $\sum_{\omega \in \Omega^F} p(\omega) = 1$

Solución

a. Ω^I contiene a todas las sucesiones que comienzan con 0 ó 1, seguido de parejas éxito-fracaso o fracaso-fracaso, pero el conjunto de sucesiones formadas de parejas éxito-fracaso o fracaso-fracaso representa al conjunto de números reales en el intervalo $[0, 1]$ que, escritos en base 4, únicamente utilizan el 2 (10) y el 0 (00) en su expansión. Este conjunto es no numerable pues, asociando la pareja 01 con 1 y la pareja 00 con 0, se puede poner en correspondencia con todos los números del intervalo $[0, 1]$ escritos en base 2.

Otro método:

Consideremos primero el caso $N = 4$.

Sea T el conjunto de las sucesiones de 0's y 1's que contienen una infinidad de 0's y una infinidad de 1's. El complemento de T es numerable, así que T es no numerable.

Consideremos entonces la función $f : T \mapsto \Omega^I$ definida por:

$(0, 0, 1, 0, 1 \dots) \mapsto (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots)$

la cual se obtiene reemplazando cada 1 de $z \in T$ por la pareja $1, 0$ y cada 0 de z por 0.

La función f es inyectiva, así que entonces Ω^I es no numerable.

Para el caso general de N jugadores (con $N \geq 4$), Ω^I contiene al Ω^I correspondiente al caso $N = 4$. Por lo tanto, Ω^I es no numerable en el caso general.

b. Definamos $S = \sum_{\{\omega\in\Omega^F\}}$ y denotemos por C a la colección de todas las sucesiones finitas $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de 0's y 1's que contienen exactamente una subsecuencia de $N-2$ 1's consecutivos y que terminan con esa subsecuencia, es decir:

$C = \Big\{(t_1, \dots, t_n) \in \Phi : n \geq N-2, \sum_{k=0}^{N-3} t_{n-k} = N-2,$

$\sum_{k=0}^{N-3} t_{j+k} < N-2$ para $j \in 0, 1, \dots, n-(N-2)\Big\}$

en donde $t_0 = 0$.

Definamos ahora:

$B_0 = \{\omega \in \Omega^F : \omega = (0, t_1, \dots, t_n),\ (t_1, \dots, t_n) \in C$ para alguna $n \in \mathbb{N}\}$

$B_1 = \{\omega \in \Omega^F : \omega = (1, t_1, \dots, t_n),\ (t_1, \dots, t_n) \in C$ para alguna $n \in \mathbb{N}\}$

Entonces, como $\Omega^F = B_0 \cup B_1$, se tiene:

$S = \sum_{\{\omega\in B_0\}} p(\omega) + \sum_{\{\omega\in B_1\}} p(\omega) = q\sum_{\{\omega\in C\}} p(\omega) + p\sum_{\{\omega\in C\}} p(\omega) = \sum_{\{\omega\in C\}} p(\omega)$

Finalmente, definamos:

$C_0 = \{\omega \in \Phi : \omega = (0, t_1, \dots, t_n), (t_1, \dots, t_n) \in C$ para alguna $n \in \mathbb{N}\}$

$C_1 = \{\omega \in \Phi : \omega = (1, 0, t_1, \dots, t_n), (t_1, \dots, t_n) \in C$ para alguna $n \in \mathbb{N}\}$

$C_2 = \{\omega \in \Phi : \omega = (1, 1, 0, t_1, \dots, t_n), (t_1, \dots, t_n) \in C$ para alguna $n \in \mathbb{N}\}$

$C_3 = \{\omega \in \Phi : \omega = (1, 1, 1, 0, t_1, \dots, t_n), (t_1, \dots, t_n) \in C$ para alguna $n \in \mathbb{N}\}$

$\vdots$

$C_{N-3} = \{\omega \in \Phi : \omega = (s_1, \ldots, s_{N-3}, 0, t_1, \ldots, t_n), (t_1, \ldots, t_n) \in C$ para alguna $n \in \mathbb{N}\}$

$C_{N-2} = \{(s_1, \ldots, s_{N-2})\}$

en donde $s_1 = s_2 = \ldots = s_{N-2} = 1$.

Se tiene, $C = \cup_{k=0}^{N-2} C_k$, así que:

$S = \sum_{\{\omega \in C\}} p(\omega) = \sum_{\{\omega \in C_0\}} p(\omega) + \sum_{\{\omega \in C_1\}} p(\omega) + \ldots + \sum_{\{\omega \in C_{N-2}\}} p(\omega)$

$= qS + qpS + qp^2S + \ldots + qp^{N-3}S + p^{N-2}$

Resolviendo esta ecuación para S, obtenemos $S = 1$.

Ejercicio 5.6. *Dos personas, A y B, quedan de verse en un determinado lugar a las* 12 *horas. Cada una de ellas llega al lugar de la cita en un tiempo al azar entre las* 12 *y las* 12 : 30 *horas. Una vez que llega al lugar de la cita, la persona A está dispuesta a esperar a lo más* 5 *minutos a que llegue la persona B, mientras que la persona B está dispuesta a esperar a la persona A a lo más* 10 *minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos personas se encuentren?*

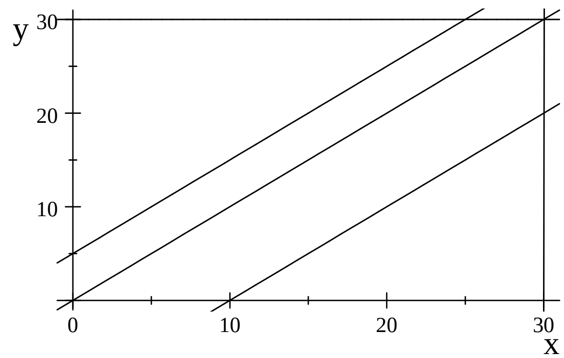
Solución

Sean x y y los tiempos de llegada al lugar de la cita de A y B, respectivamente.

Las dos personas se encuentran si $x \leq y \leq x + 5$ o $y \leq x \leq y + 10$.

El área de esta región es $(30)^2 - \frac{1}{2}(25)^2 - \frac{1}{2}(20)^2$; por lo tanto llamando A al evento 'A y B se encuentran en el lugar de la cita', tenemos:

$P(A) = \frac{(30)^2 - \frac{1}{2}(25)^2 - \frac{1}{2}(20)^2}{(30)^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{31}{72} = 0.430556$



Ejercicio 5.7. *En una parada, el primer autobús del día pasa en un tiempo al azar entre las* $7:00$ *y las* $7:15$ *hrs. Si una persona llega a la parada en un tiempo al azar entre las* $7:10$ *y las* $7:15$ *hrs., ¿cuál es la probabilidad de que la persona llegue a la parada antes que el primer autobús del día?*

Solución

Sean x y y los tiempos de llegada a la parada del autobús y de la persona, respectivamente.

Se tiene $10 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 15$ y la persona llega a la parada antes que el primer autobús del día si $x \leq y$, así que la probabilidad buscada está dada por $\frac{\frac{25}{2}}{75} = \frac{1}{6}$.

Ejercicio 5.8. *Para ir de una parte de la ciudad a otra, una persona puede tomar cualquiera de dos transportes, los cuales siguen rutas distintas, identificadas con las letras A y B. Los transportes que siguen la ruta A salen cada* 15 *minutos comenzando a las* 7 *de la mañana, los que siguen la ruta B salen también cada* 15 *minutos pero comienzan a la* $7:05$ *de la mañana. La persona en consideración llega siempre al inicio de las rutas en un tiempo al azar entre las* 7 *y las* 8 *de la mañana y toma el primer transporte que salga después de su llegada. ¿Cuál es el porcentaje de veces en que la persona toma el transporte que sigue la ruta A?*

Solución

La persona toma el transporte que sigue la ruta A si y sólo si llega al inicio de las rutas a las $7:00$ o dentro de cualquiera de los intervalos de tiempo $(7:05, 7:15]$, $(7:20, 7:30]$, $(7:35, 7:45]$ y $(7:50, 8:00]$. La suma de las longitudes de estos intervalos es igual a 40 minutos; por lo tanto, la persona toma el transporte que sigue la ruta A un 66.66% de veces.

Ejercicio 5.9. *Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección de eventos tales que $P(A_n) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.*

Solución

$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left[\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right] = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = 1$

Ejercicio 5.10. *Sean $A_1, A_2, \ldots$ y $B_1, B_2, \ldots$ dos colecciones de eventos tales que:*

$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$ *y* $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = p$

Demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) = p$.

Solución

$P(B_n) = P(B_n \cap A_n) + P(B_n \cap A_n^c)$

Pero $\lim_{n\to\infty} P(B_n \cap A_n^c) \leq \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 0$.

Así que:

$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = p$

Ejercicio 5.11. *Demuestre las proposiciones 5.41, 5.42 y 5.43.*

Solución

Proposición 5.41 Todo intervalo de $\mathbb{R}$ es boreliano.

$(x, \infty) = (-\infty, x]^c$

$(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x - \frac{1}{n}]$

$[x, \infty) = (-\infty, x)^c$

$(a, b) = (-\infty, b) - (-\infty, a]$

$(a, b] = (-\infty, b] - (-\infty, a]$

$[a, b) = (-\infty, b) - (-\infty, a)$

$[a, b] = (-\infty, b] - (-\infty, a)$

Proposición 5.42 Los subconjuntos abiertos y los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ son borelianos.

Todo conjunto abierto es unión numerable de intervalos abiertos y el complemento de todo conjunto cerrado es abierto.

Proposición 5.43 La σ-álgebra de los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ está generada por cualquiera de las siguientes familias de subconjuntos.

a) Los intervalos de la forma (x, ∞).

b) Los intervalos de la forma $(-\infty, x)$.

c) Los intervalos de la forma $[x, \infty)$.

d) Los intervalos de la forma $(a, b]$.

e) Los intervalos de la forma $[a, b)$.

f) Los intervalos de la forma (a, b).

g) Los intervalos de la forma $[a, b]$.

h) Los conjuntos abiertos.

i) Los conjuntos cerrados.

a. $(-\infty, x] = (x, \infty)^c$

b. $(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x + \frac{1}{n})$

c. $(-\infty, x] = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty}[x + \frac{1}{n}, \infty)\right]^c$

d. $(-\infty, x] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, x]$

e. $(-\infty, x] = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty}[x + \frac{1}{n}, n)\right]^c$

f. $(-\infty, x] = [\bigcup_{n=1}^{\infty}(x, n)]^c$

g. $(-\infty, x] = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n, x]$

h. Los intervalos de la forma (a, b) son conjuntos abiertos.

i. Los intervalos de la forma $[a, b]$ son conjuntos cerrados.

Ejercicio 5.12. *Demuestre la proposición 5.46.*

Solución

Proposición 5.46 Si $\{A_n\}$ es una familia finita o infinita numerable de conjuntos de medida cero, entonces $A = \cup_n A_n$ tiene medida cero.

Dada $\varepsilon > 0$, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, una colección finita o infinita numerable de intervalos abiertos $\{I_{nk}\}$ tales que $A_n \subset \bigcup_k I_{nk}$ y $\sum_k l(I_{nk}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Entonces la colección de todos los intervalos I_{nk} es numerable, $A \subset \bigcup_{n,k} I_{nk}$ y $\sum_{n,k} l(I_{nk}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. Así que A tiene medida cero.

Ejercicio 5.13. *Demuestre las proposiciones 5.69 y 5.70.*

Solución

Proposición 5.69 Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ son borelianas entonces $g \circ f$ es boreliana.

Sea B un boreliano de $\mathbb{R}^p$, entonces $g^{-1}(B)$ es un boreliano de $\mathbb{R}^m$. Por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 5.70 Toda función continua $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ es boreliana.

La familia de subconjuntos B de $\mathbb{R}^m$, tales que $f^{-1}(B)$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$, forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ la cual contiene a los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$, por lo tanto, contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}^m$.

Ejercicio 5.14. *Demuestre el corolario 5.72.*

Solución

Corolario 5.72 Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ son borelianas y $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0$, entonces $af + b$, $|f|^{\alpha}$, $f + g$, fg, $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son borelianas.

La función $x \mapsto af(x) + b$ es la composición de f y la función continua $g(x) = ax + b$.

La función $x \mapsto |f|^{\alpha}$ es la composición de f y la función continua $g(x) = |x|^{\alpha}$.

La función $x \mapsto f(x) + g(x)$ es la composición de la función continua $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = x + y$ y la función $H : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $H(x) = (f(x), g(x))$, la cual es boreliana.

La función $x \mapsto f(x)g(x)$ es la composición de la función continua $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = xy$ y la función $H : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $H(x) = (f(x), g(x))$, la cual es boreliana.

La función $x \mapsto \text{máx}\,(f(x), g(x))$ es la composición de la función continua $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = \text{máx}(x, y)$ y la función $H : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $H(x) = (f(x), g(x))$, la cual es boreliana.

La función $x \mapsto \text{mín}\,(f(x), g(x))$ es la composición de la función continua $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = \text{mín}(x, y)$ y la función $H : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $H(x) = (f(x), g(x))$, la cual es boreliana.

CAPÍTULO 6

VARIABLES ALEATORIAS

EJERCICIO 6.1. *Sea X una variable aleatoria continua. Exprese $P[|X-1|>2]$ en términos de la función de distribución, F_X, de X.*

Solución

$$P[|X-1|>2] = P[X-1>2] + P[X-1<-2] = P[X>3] + P[X<-1]$$

$$= 1 - P[X \leq 3] + P[X \leq -1] = 1 - F_X(3) + F_X(-1)$$

EJERCICIO 6.2. *Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & si\ x \in [0,1) \\ \frac{3}{4} & si\ x \in [1,2) \\ \frac{1}{4}(x+1) & si\ x \in [2,3) \\ 1 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Encuentre a) $P\left[\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2}\right]$, b) $P[X<1]$, c) $P[X=1]$ y d) $P\left[X = \frac{1}{2}\right]$.

Solución

a. $P\left[\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2}\right] = P\left[X < \frac{5}{2}\right] - P\left[X \leq \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}(\frac{5}{2}+1) - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$

b. $P[X<1] = \frac{1}{2}$

c. $P[X=1] = \frac{1}{4}$

d. $P\left[X = \frac{1}{2}\right] = 0$

EJERCICIO 6.3. *Dé un ejemplo que una función de distribución discreta que sea estrictamente creciente.*

Solución

Sea $\{r_1, r_2, \ldots\}$ el conjunto de números racionales y definamos la función $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$F(x) = \sum_{\{k\in\mathbb{N}:r_k\leq x\}} \frac{1}{2^k}$

Ejercicio 6.4. *Sea f la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ -1 < x < 0 \\ 2x-6 & si\ 3 < x < c \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde c es una constante. a) Determine el valor de c de tal manera que f sea una función de densidad. b) Encuentre la función de distribución correspondiente a f.

Solución

$\int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_3^c 2(x-3)dx = \frac{1}{2} + (c-3)^2$

Así que $c = 3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si } x \in [-1,0) \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,3) \\ \frac{1}{2} + (x-3)^2 & \text{si } x \in [3,c) \\ 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

Ejercicio 6.5. *Sea f la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} C(x^3-2x) & si\ 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde C es una constante. ¿Podría ser f una función de densidad?

Solución

$\int_0^{\frac{5}{2}}(x^3-2x)dx = \frac{225}{64}$

Por lo tanto, para que f sea una función de densidad se requiere que $C = \frac{64}{225}$. Pero si $C > 0$, se tendría $f(x) = C(x^3 - 2x) = Cx(x^2 - 2) = Cx(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) < 0$, para $0 < x < \sqrt{2}$, lo cual no es admisible para una función de densidad.

Ejercicio 6.6. *El volumen de ventas (en miles de galones) por semana de una estación de gasolina es una variable aleatoria con función de densidad dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \textit{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Si la estación es abastecida de gasolina una vez por semana, ¿cuál debe ser la capacidad del tanque para que la probabilidad de que se rebase sea menor que 0.01*.*

Solución

Se tiene:

$P[X > C] = \int_C^1 5(1-x)^4 dx = (1-C)^5 < 0.01$

Así que $P[X > C] < 0.01$ si y sólo si $C > 1 - (0.01)^{\frac{1}{5}} = 0.6019$

Ejercicio 6.7. *Una urna contiene* n *tarjetas numeradas del* 1 *al* n*. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar tarjetas al azar, una a una y con reemplazo, hasta que se obtiene una tarjeta que ya se seleccionó con anterioridad. Encuentre la función de densidad de la variable aleatoria* X *definida como el número de tarjetas que son seleccionadas en este proceso.*

Solución

$P[X = k] = (k-1)!\frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}}\frac{k-1}{n}$

$P[X \geq k] = \frac{(k-1)!\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{n^{k-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-2}{n}\right)$

$P[X = k] = P[X \geq k] - P[X \geq k+1]$

$= (k-1)!\frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - k!\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = (k-1)!\frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - k!\frac{\binom{n}{k-1}}{n^k}\frac{n-k+1}{k}$

$= (k-1)!\frac{\binom{n}{k-1}}{n^k}[n - (n-k+1)] = (k-1)!\frac{\binom{n}{k-1}}{n^k}(k-1)$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)!\frac{\binom{n}{x-1}}{n^x}(x-1) & \text{si } x \in \{2, \ldots, n+1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-2}{n}\right) & \text{si } x \in \{2,\ldots,n+1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EJERCICIO 6.8. *Muestre con un ejemplo que existen variables aleatorias X y Y tales que X^2 y Y^2 son independientes, pero X y Y no lo son.*

Solución

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in \{-1,1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$Y = -X$

CAPÍTULO 7

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

EJERCICIO 7.1. *Cada día el precio de una determinada acción sube o baja una unidad con probabilidades de* $3/4$ *y* $1/4$*, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que en* 6 *días el precio de la acción regresará a su valor original?*

Solución

Para regresar al valor original se requiere que la acción suba 3 unidades y baje 3, por lo tanto la probabilidad que se busca está dada por:

$\binom{6}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{135}{1024} = 0.13184$

EJERCICIO 7.2. *Asumiendo que la probabilidad de que un hijo procreado por una pareja sea niño es igual a* $\frac{1}{2}$*, ¿qué evento es más probable, que una pareja con* 4 *hijos tenga* 2 *hombres y* 2 *mujeres, o bien* 3 *hijos de un sexo y* 1 *del otro?*

Solución

$P\left[2 \text{ hombres y } 2 \text{ mujeres}\right] = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$

$P\left[3 \text{ hijos de un sexo y } 1 \text{ del otro}\right] = 2\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, es más probable que una pareja con 4 hijos tenga 3 hijos de un sexo y 1 del otro, que 2 de un sexo y 2 del otro.

EJERCICIO 7.3. *¿Qué evento es más probable, obtener por lo menos un* 6 *al lanzar* 6 *veces un dado, por lo menos* 2 *seises al lanzar* 12 *veces un dado, o bien por lo menos* 3 *seises al lanzar* 18 *veces un dado?*

Solución

P [obtener por lo menos 1 seis al lanzar 6 veces un dado]

$= 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{31031}{46656} = 0.6651$

P [obtener por lo menos 2 seises al lanzar 12 veces un dado]

$= 1 - \binom{12}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{11} = \frac{1346704211}{2176782336} = 0.61867$

P [obtener por lo menos 3 seises al lanzar 18 veces un dado]

$= 1 - \binom{18}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{18} - \binom{18}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{17} - \binom{18}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{16}$

$= \frac{15166600495229}{25389989167104} = 0.59735$

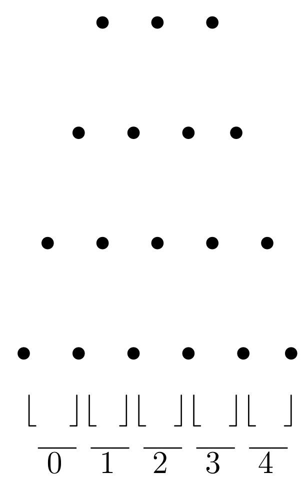
Por lo tanto, la probabilidad más alta es la de obtener por lo menos 1 seis al lanzar 6 veces un dado.

EJERCICIO 7.4. *Se quiere transmitir un mensaje que consiste de uno de los dos dígitos, 0 ó 1. Debido a la estática, un dígito transmitido es recibido incorrectamente con probabilidad igual a* 0.2. *Para reducir la probabilidad de error, en lugar de transmitir el dígito* 0 *se trasmite la secuencia* 00000 *y en lugar del* 1 *se transmite* 11111. *Quien recibe el mensaje decide que el dígito que se transmitió fue aquel que recibió por lo menos* 3 *veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el mensaje sea recibido correctamente?*

Solución

$\binom{5}{3}(0.8)^3(0.2)^2 + \binom{5}{4}(0.8)^4(0.2)^1 + \binom{5}{5}(0.8)^5(0.2)^0 = 0.94208$

EJERCICIO 7.5. *Considere el dispositivo que se muestra en la figura de abajo, en el cual cada punto representa un clavo colocado verticalmente. Cuando se hace pasar una pelotita entre los dos clavos de la parte superior, ésta golpea el clavo del nivel siguiente y con probabilidad* $\frac{1}{2}$ *continúa su camino por el hueco de la derecha o el de la izquierda. Este proceso continúa hasta que la pelotita cae en alguna de las* 5 *cajas de la parte inferior. Si se realiza este proceso con* 1,000 *pelotitas de manera independiente, ¿aproximadamente cuántas de ellas caerán en la caja marcada con el número* 2*?*



Solución

Sea X el número de la caja que ocupa la pelotita al final del proceso. X tiene entonces distribución binomial con parámetros $n = 4$ y $p = \frac{1}{2}$.

$P\left[X = 2\right] = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \frac{3}{8} = 0.375$

Así que, de las $1,000$ pelotitas, aproximadamente el 37.5% de ellas caerá en la caja número 2; es decir, caerán en esa caja aproximadamente 375 pelotitas.

Otro método:

También se puede argumentar definiendo el lanzamiento de una pelotita, desde la parte superior, como un ensayo de Bernoulli en el cual se obtiene éxito si la pelotita cae en la caja número 2. El número de pelotitas que caen en la caja 2 tiene entonces distribución binomial con parámetros $n = 1,000$ y $p = 0.375$, así que su valor esperado es igual a $np = 375$.

Ejercicio 7.6. *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p y sea k un número entero entre 0 y n. Encuentre el valor de p que hace que $P(X = k)$ sea un máximo.*

Solución

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Sea $f(p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, entonces:

$f'(p) = \binom{n}{k} p^k \frac{k}{p} (1-p)^{n-k} - \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{n-k}{1-p} = 0$

Así que $f'(p) = 0$ cuando $p = \frac{k}{n}$, el cual corresponde al valor máximo de $P(X = k)$.

Ejercicio 7.7. *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Demuestre que la probabilidad de que X tenga como valor un número impar es igual a $\frac{1}{2}[1-(q-p)^n]$.*

Solución

$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$(q-p)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$(p+q)^n - (q-p)^n = 2\left[\binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} + \binom{n}{3} p^3 (1-p)^{n-3} + \cdots\right]$

Por lo tanto, $P(X \text{ es impar}) = \frac{1}{2}[(p+q)^n - (q-p)^n] = \frac{1}{2}[1-(q-p)^n]$.

Ejercicio 7.8. *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Si se sabe que el valor de X es k, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra cada uno de los $\binom{n}{k}$ arreglos de k éxitos y $n-k$ fracasos?*

Solución

Sea t un arreglo cualquiera de k éxitos y $n-k$ fracasos.

$P(t \mid X = k) = \frac{P(t)}{P(X=k)} = \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$

Es decir, los $\binom{n}{k}$ posibles arreglos de k éxitos y $n-k$ fracasos tienen la misma probabilidad.

Ejercicio 7.9. *Dos jugadores de ajedrez, A y B, juegan una serie de juegos con la condición de que A ganará la serie si gana 12 partidas antes de que B gane 6, de otra manera, B gana la serie (los empates no cuentan). Si la probabilidad de que A le gane una partida a B es igual a $\frac{2}{3}$ y la serie se interrumpe cuando A ha ganado 7 juegos y B 4, ¿quién merece ser nombrado el ganador?*

Solución

$P(\text{A gane la serie}) = \sum_{k=5}^{7} \binom{7}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k} = \frac{416}{729} = 0.5706$

Así que es A quien merece ser nombrado el ganador.

EJERCICIO 7.10. *Un fumador tiene dos cajas con N cerillos cada una. Cada vez que necesita un cerillo, selecciona al azar una de las cajas y lo toma de ahí. Sea X el número de cerillos que le quedan en el momento en que encuentre que la caja que selecciona ya no tiene cerillos. Encuentre la distribución de X.*

Solución

Los posibles valores de X son $0, \ldots, N$. Sean A y B las cajas de cerillos y A y B los eventos 'el fumador descubre que la caja A ya no tiene cerillos' y 'el fumador descubre que la caja B ya no tiene cerillos', respectivamente.

Para $k \in \{0, \ldots, N\}$, se tiene:

$$P[X = k] = P[X = k, A] + P[X = k, B] = 2P[X = k, A]$$

Llamemos éxito al hecho de seleccionar la caja A y fracaso al hecho de seleccionar la caja B. Entonces el evento $[X = k, A]$ ocurre si se tienen $N - k$ fracasos antes del éxito $N + 1$. Por lo tanto se tiene una distribución binomial negativa, es decir:

$$P[X = k, A] = \binom{N+1+N-k-1}{N-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1} = \binom{2N-k}{N-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1} = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1}$$

De manera que entonces se tiene:

$$P[X = k] = 2P[X = k, A] = 2\binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1} = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{2N-x}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-x} & \text{si } x \in \{0, \ldots, N\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EJERCICIO 7.11. *Supongamos que, para $n \geq 1$, una pareja tiene n hijos con probabilidad igual a αp^n, en donde $0 < \alpha \leq \frac{1-p}{p}$ y $0 < p < 1$. Supongamos además que cada uno de los hijos es hombre o mujer con probabilidad igual a $\frac{1}{2}$. Para $k \in \{1, 2, \ldots\}$, ¿cuál es la probabilidad de que una pareja tenga por lo menos k hijos, de los cuales k exactamente sean mujeres?*

Solución

Si $k > 0$, se tiene:

$$P[k \text{ mujeres y } r \text{ hombres}] = P[k \text{ mujeres y } k + r \text{ hijos}]$$

$$= P[k \text{ mujeres} \mid k + r \text{ hijos}]\, P[k + r \text{ hijos}] = \binom{k+r}{k}\frac{1}{2^{k+r}}\alpha p^{k+r} = \binom{k+r}{r}\frac{1}{2^{k+r}}\alpha p^{k+r}$$

$= \alpha \left(\frac{p}{2}\right)^k \binom{k+r}{r} \left(\frac{p}{2}\right)^r$

$P\left[\text{exactamente } k \text{ mujeres}\right]$

$= \sum_{r=0}^{\infty} \alpha \left(\frac{p}{2}\right)^k \binom{k+r}{r} \left(\frac{p}{2}\right)^r = \alpha \left(\frac{p}{2}\right)^k \left(\frac{2}{2-p}\right)^{k+1} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+1+r-1}{r} \left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1} \left(\frac{p}{2}\right)^r$

Cada término de la última sumatoria corresponde a la probabilidad de obtener r fracasos antes del éxito $k+1$ en una sucesión de ensayos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito igual a $1-\frac{p}{2}$ en cada ensayo. Por lo tanto, el valor de esa sumatoria es 1, así que la probabilidad que se busca está dada por:

$\alpha \left(\frac{p}{2}\right)^k \left(\frac{2}{2-p}\right)^{k+1} = \frac{2\alpha}{2-p} \left(\frac{p}{2-p}\right)^k$

Si $k=0$, se tiene:

$P\left[k \text{ mujeres y } r \text{ hombres}\right] = P\left[k \text{ mujeres y } k+r \text{ hijos}\right]$

$= P\left[k \text{ mujeres} \mid k+r \text{ hijos}\right] P\left[k+r \text{ hijos}\right] = \begin{cases} \frac{1}{2^r}\alpha p^r = \alpha\left(\frac{p}{2}\right)^r & \text{si } r>0 \\ \left(1-\frac{\alpha p}{1-p}\right) & \text{si } r=0 \end{cases}$

$P\left[\text{exactamente } k \text{ mujeres}\right]$

$= \left(1-\frac{\alpha p}{1-p}\right) + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha\left(\frac{p}{2}\right)^r = \left(1-\frac{\alpha p}{1-p}\right) + \frac{\alpha p}{2-p} = 1 - \frac{\alpha p}{(1-p)(2-p)}$

Así que se obtiene finalmente:

$\text{P[exactamente } k \text{ mujeres]} = \begin{cases} \frac{2\alpha}{2-p}\left(\frac{p}{2-p}\right)^k & \text{si } k \in \{1,2,\ldots\} \\ 1-\frac{\alpha p}{(1-p)(2-p)} & \text{si } k=0 \end{cases}$

Ejercicio 7.12. *Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p. Encuentre $P(X \geq x)$ para todos los enteros no negativos x.*

Solución

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - \sum_{k=0}^{x-1} p(1-p)^k = 1 - (1-(1-p)^x) = (1-p)^x$$

Ejercicio 7.13. *Sea X una variable aleatoria discreta que toma únicamente valores enteros no negativos y tal que, para cualquier entero no negativo n, se tiene:*

$P\left[X=n \mid X>n-1\right] = P\left[X=0\right]$

Demuestre que X tiene distribución geométrica.

Solución

Se tiene:

$P\left[X=n, X>n-1\right]=P\left[X=0\right]P\left[X>n-1\right]$

Es decir:

$P\left[X=n\right]=P\left[X=0\right]P\left[X\geq n\right]$

Sea $p=P\left[X=0\right]$, entonces $P\left[X=n\right]=pP\left[X\geq n\right]$ para cualquier n entero no negativo.

Vamos a demostrar que $P\left[X=k\right]=pq^k$ para cualquier k entero no negativo.

Evidentemente se cumple la propiedad para $k=0$. Supongamos ahora que $P\left[X=k\right]=pq^k$ para cualquier $k\leq n$, entonces:

$P\left[X=n+1\right]=pP\left[X\geq n+1\right]=p\left(1-\sum_{k=0}^{n}P\left[X=k\right]\right)$

$=p\left(1-\sum_{k=0}^{n}pq^k\right)=p\left(1-\frac{p-pq^{n+1}}{1-q}\right)=pq^{n+1}$

Ejercicio 7.14. *Se quiere seleccionar a una persona de entre n. Para ello, cada una lanza una moneda y se conviene en que si alguna obtiene un resultado distinto al de las otras, entonces esa persona es la seleccionada; de otra manera se vuelven a lanzar las monedas bajo las mismas condiciones. Encuentre la probabilidad de que la persona sea seleccionada en el intento número k.*

Solución

Llamando éxito a la obtención de cara al lanzar una moneda, cada lanzamiento de las n monedas representa la realización de n ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito igual a $\frac{1}{2}$. La persona es seleccionada en un lanzamiento únicamente si se obtiene exactamente un éxito o bien exactamente un fracaso, así que la probabilidad de que esto ocurra está dada por $2n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Los diferentes intentos de seleccionar a la persona constituyen una sucesión de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito $p=2n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, de manera que si llamamos p_k a la probabilidad buscada, se tiene:

$p_k=\left[1-2n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^{k-1}2n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2^{n-1}}\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}$

Ejercicio 7.15. *Dos basketbolistas, A y B, juegan a lanzar por turnos una pelota sobre el aro, deteniéndose en el momento en que uno de ellos logre acertar. En cada uno de sus turnos, los jugadores A y B tienen probabilidades de acertar iguales a p_1 y p_2, respectivamente. Sean X y Y los números de tiros que realizan A y B, respectivamente, sin contar el último, hasta que se termina el juego. Asumiendo que todos los lanzamientos son independientes y que el primero en tirar es A, argumente, sin realizar cálculos, para mostrar que la distribución de Y es geométrica. Encuentre la función de densidad de X y el parámetro p de la distribución de Y.*

Solución

X y Y pueden tomar los valores $0, 1, \ldots$. Y toma el valor k cuando en los primeros $2k$ tiros ninguno de los jugadores logra acertar y en alguno de los dos siguientes alguno acierta. Definamos entonces un ensayo de Bernoulli consistente en dos tiros al aro, uno de A y uno de B, conveniendo en que se tiene éxito si alguno de los dos acierta. Y es precisamente el número de fracasos antes del primer éxito en una sucesión de estos ensayos y entonces su distribución es geométrica. El parámetro p de esta distribución geométrica es la probabilidad de que en dos tiros, uno de A y otro de B, alguno de los dos acierte, es decir, $p = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = p_1 + p_2(1 - p_1)$.

Para $k \geq 1$, X toma el valor k cuando en los primeros $2k - 1$ tiros ninguno de los jugadores acierta y B acierta en seguida, o bien cuando en los primeros $2k$ tiros ninguno de los jugadores acierta y A acierta en seguida. Por lo tanto, si $k \geq 1$:

$$P[X = k] = (1 - p_1)^k (1 - p_2)^{k-1} p_2 + (1 - p_1)^k (1 - p_2)^k p_1$$

$$= (1 - p_1)^k (1 - p_2)^{k-1} [p_2 + p_1(1 - p_2)]$$

Además, $P[X = 0] = p_1$.

Así que:

$$f_X(x) = \begin{cases} p_1 & \text{si } x = 0 \\ (1 - p_1)^x (1 - p_2)^{x-1} [p_2 + p_1(1 - p_2)] & \text{si } x \in \{1, 2, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 7.16. *Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ. Demuestre que la probabilidad de que X tenga como valor un número impar es igual a $\frac{1}{2}\left[e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right]$.*

Solución

Se tiene:

$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

$e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!}$

$e^{\lambda} - e^{-\lambda} = 2\left[\frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\right]$

Por lo tanto, $P(X \text{ es impar}) = \frac{1}{2}\left[e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right]$.

Ejercicio 7.17. *Supongamos que el número de accidentes que tiene una persona en un año tiene distribución Poisson con parámetro λ, de tal manera que, en una cierta población, $\lambda = 2$ para el $60\,\%$ de personas y $\lambda = 3$ para el $40\,\%$. Si X es el número de accidentes en un año de una persona seleccionada al azar, encuentre la distribución de X.*

Solución

Para $x \in \{0, 1, \ldots\}$, se tiene:

$P\left[X = x\right] = 0.6P\left[X = x \mid \lambda = 2\right] + 0.4P\left[X = x \mid \lambda = 4\right]$

$= 0.6\frac{2^x e^{-2}}{x!} + 0.4\frac{3^x e^{-3}}{x!} = \frac{1}{x!}\left(0.6e^{-2}2^x + 0.4e^{-3}3^x\right)$

Así que:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x!}\left(0.6e^{-2}2^x + 0.4e^{-3}3^x\right) & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 7.18. *Utilice la aproximación de Poisson para calcular la probabilidad de que en una caja de 100 cerillos se encuentren a lo más 2 cerillos defectuosos si $3\,\%$ de los cerillos que se producen son defectuosos.*

Solución

Sea X el número de cerillos defectuosos en la caja. X tiene aproximadamente distribución Poisson con parámetro $\lambda = (100)(.03) = 3$.

$P\left[X \leq 2\right] = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}) = \frac{17}{2}e^{-3} = 0.42319$

Ejercicio 7.19. *Los astrónomos estiman que en la Vía Láctea hay alrededor de 100 billones de estrellas las cuales tienen planetas a su alrededor. Sea p la probabilidad de que en un sistema solar determinado haya vida inteligente. ¿Para qué valores de*

p la probabilidad de que haya vida inteligente en algún sistema solar de la Vía Láctea es mayor que $\frac{1}{2}$?

Solución

Sea X el número de sistemas solares de la Vía Láctea en donde hay vida inteligente. X tiene entonces distribución binomial con parámetros $n = 10^{11}$ y p, la cual se puede aproximar mediante una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 10^{11}p$. Por otra parte, se busca p tal que $P[X \geq 1] > \frac{1}{2}$; pero:

$p[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - e^{-\lambda}$

Se busca entonces p tal que $e^{-\lambda} < \frac{1}{2}$, es decir, $\lambda > \ln 2$. Por lo tanto:

$p > 10^{-11} \ln 2 = 6.9315 \times 10^{-12}$

Utilizando directamente la distribución binomial, se tiene:

$P[X = 0] = (1 - p)^n < \frac{1}{2}$

$1 - p < 2^{-\frac{1}{n}}$

$p > 1 - 2^{-\frac{1}{n}} = 1 - 2^{-10^{-11}}$

EJERCICIO 7.20. *Supongamos que el número de huevos, X, que pone un insecto tiene distribución Poisson con parámetro λ y que la probabilidad de que un huevo se desarrolle es igual a p. Sea Y el número de huevos que se desarrollan. Demuestre que Y tiene distribución Poisson con parámetro λp.*

Solución

Para $k \in \{0, 1, \ldots\}$, se tiene:

$P[Y = k] = \sum_{j=0}^{\infty} P[Y = k \mid X = j] P[X = j] = \sum_{j=k}^{\infty} P[Y = k \mid X = j] P[X = j]$

$= \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(j-k)!}(1-p)^{j-k}\lambda^{j-k}$

$= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(1-p)^i \lambda^i = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda - \lambda p} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}$

Por lo tanto, Y tiene distribución Poisson con parámetro λp.

EJERCICIO 7.21. *Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ. Para un número entero positivo k fijo, encuentre el valor de λ que hace que $P(X = k)$ sea un máximo.*

Solución

Sea $f(\lambda) = P[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

$f'(\lambda) = -e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\lambda^k\frac{k}{\lambda k!} = 0$ tiene como solución $\lambda = k$, valor que corresponde a un máximo de la función $f(\lambda)$. Por lo tanto el valor de λ que hace que $P[X = k]$ sea un máximo es $\lambda = k$.

EJERCICIO 7.22. *En una fábrica se empacan cajas de cereal con pasas mezclando primero, en un gran recipiente, el cereal con las pasas y de tal manera que cada caja contenga, en promedio, 12 pasas. Estime la probabilidad de que una caja de cereal, seleccionada al azar, contenga menos de 7 pasas.*

Solución

$\sum_{k=0}^{6} \frac{(12)^k e^{-12}}{k!} = 0.045822$

EJERCICIO 7.23. *Un libro de 500 páginas contiene 500 errores de imprenta. Estime la probabilidad de que una página, seleccionada al azar, contenga 3 o más errores.*

Solución

$e^{-1}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 - e^{-1}\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{5}{2}e^{-1} = 0.080301$

EJERCICIO 7.24. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y sin reemplazo, dos bolas de una caja que contiene N bolas marcadas con los números $1, \ldots N$. Sea X el mayor de los dos números de las bolas seleccionadas. Encuentre la función de densidad de X.*

Solución

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\binom{N}{2}} & \text{si } x \in \{2, \ldots, N\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 7.25. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar y sin reemplazo, 3 números del conjunto $\{1, \ldots, N\}$. Sea X el menor de los números seleccionados, Z el mayor de ellos y Y el número intermedio. Encuentre las funciones de densidad de X, Y y Z.*

Solución

Para $k \in \{1, \ldots, N-2\}$, se tiene:

$$P[X = k] = \frac{\binom{N-k}{2}}{\binom{N}{3}} = \frac{3(N-k)(N-k-1)}{N(N-1)(N-2)}$$

Así que:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3(N-x)(N-x-1)}{N(N-1)(N-2)} & \text{si } x \in \{1, \ldots, N-2\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para $k \in \{2, \ldots, N-1\}$, se tiene:

$$P[Y = k] = \frac{\binom{k-1}{1}\binom{N-k}{1}}{\binom{N}{3}} = \frac{6(k-1)(N-k)}{N(N-1)(N-2)}$$

Así que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6(y-1)(N-y)}{N(N-1)(N-2)} & \text{si } y \in \{2, \ldots, N-1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para $k \in \{3, \ldots, N\}$, se tiene:

$$P[Z = k] = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{N}{3}} = \frac{3(k-1)(k-2)}{N(N-1)(N-2)}$$

Así que:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3(z-1)(z-2)}{N(N-1)(N-2)} & \text{si } z \in \{3, \ldots, N\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 7.26. *Un estudiante va a presentar un examen, el cual consistirá de 5 preguntas seleccionadas al azar de entre 10 que el profesor les dejó estudiar. Si el estudiante prepara únicamente las respuestas de 8 de las 10 preguntas, ¿cuál es la probabilidad de que responda bien por lo menos 4 preguntas del examen?*

Solución

Sea X el número de preguntas que responde bien el estudiante.

$P[X \geq 4] = \frac{\binom{8}{4}\binom{2}{1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = 0.77778$

EJERCICIO 7.27. *Utilice la identidad* $(1+t)^{r+s} = (1+t)^r(1+t)^s$ *para demostrar que si la variable aleatoria* X *tiene distribución hipergeométrica, entonces:*

$\sum_k P[X = k] = 1.$

Solución

$(1+t)^{r+s} = \sum_{n=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} t^n$

$(1+t)^r(1+t)^s = \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} t^k\right) \left(\sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} t^k\right)$

Igualando los coeficientes de las potencias de t, se obtiene, para $n \leq r+s$:

$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

en donde la sumatoria es sobre todos los enteros k tales que $0 \leq k \leq r$ y $0 \leq n-k \leq s$.

Si X tiene distribución hipergeométrica con parámetros n, r y s, con $n \leq r+s$, entonces:

$P[X = k] = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$

para todos los enteros k tales que $0 \leq k \leq r$ y $0 \leq n-k \leq s$.

Por lo tanto:

$\sum_k P[X = k] = \sum_k \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} = \frac{\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} = \frac{\binom{r+s}{n}}{\binom{r+s}{n}} = 1$

EJERCICIO 7.28. *Supongamos que* 5 *personas, incluidas* A *y* B*, se sientan al azar en* 5 *sillas colocadas en hilera y sea* X *el número de personas colocadas entre* A *y* B*. Encuentre la función de densidad de* X*.*

Solución

Los posibles valores de X son $0, 1, 2, 3$.

$P\left[X=0\right]=\frac{4}{\binom{5}{2}}=\frac{2}{5}$

$P\left[X=1\right]=\frac{3}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$

$P\left[X=2\right]=\frac{2}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{5}$

$P\left[X=3\right]=\frac{1}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$

En general, para $k\in\{0,1,2,3\}$, se tiene: $P\left[X=k\right]=\frac{4-k}{\binom{5}{2}}=\frac{4-k}{10}$, por lo tanto:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{4-x}{10} & \text{si } x\in\{0,1,2,3\}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Ejercicio 7.29. *Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{c}{3^x} & \textit{si } x\in\{2,3,\ldots\}\\ 0 & \textit{en otro caso}\end{cases}$$

donde c es una constante. Encuentre el valor de c y la probabilidad de que X tome como valor un número par.

Solución

$\sum_{x=2}^{\infty}\frac{c}{3^x}=c\sum_{x=2}^{\infty}\frac{1}{3^x}=\frac{1}{6}c=1$. Por lo tanto $c=6$.

$P\left[X \text{ es par}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}P\left[X=2k\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{3^{2k}}=c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}=\frac{1}{8}c=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

Ejercicio 7.30. *Demuestre que la función dada por:*

$$f_X(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\ln(1-q)}\frac{q^x}{x} & \textit{si } x\in\{1,2,\ldots\}\\ 0 & \textit{en otro caso}\end{cases}$$

es una función de densidad, donde $q\in(0,1]$.

Solución

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^q x^{k-1}dx=\int_0^q\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}dx=\int_0^q\frac{1}{1-x}dx=\ln(1-q)$

Ejercicio 7.31. *Sea X una variable aleatoria distribuida uniformemente en el conjunto $\{0,1,....,99\}$. Calcule a) $P(X\geq 25)$, b) $P(2.6\leq X\leq 12.2)$, c) $P(8<X\leq$*

10 ó 30 $<$ X $\leq$ 32) *y*
d) $P(25 \leq X \leq 30)$.

Solución

a) $P(X \geq 25) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

b) $P(2.6 \leq X \leq 12.2) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

c) $P(8 < X \leq 10 \text{ ó } 30 < X \leq 32) = \frac{2}{100} + \frac{2}{100} = \frac{1}{25}$

d) $P(25 \leq X \leq 30) = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$

Ejercicio 7.32. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar al azar un número entero entre* 0 *y* 99 *(inclusive). Sea* X *la suma de los dígitos que se obtienen. Encuentre la función de densidad de* X.

Solución

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{100} & \text{si } x \in \{0, \ldots, 9\} \\ \frac{19-x}{100} & \text{si } x \in \{10, \ldots, 18\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 7.33. *Sea* X *y* Y *dos variables aleatorias independientes,* X *con distribución uniforme en el conjunto* $\{1, \ldots, N\}$, Y *con distribución uniforme en el conjunto* $\{1, \ldots, M\}$, *en donde* $N \leq M$. *Encuentre* $P[X < Y]$ *y* $P[X = Y]$.

Solución

$$P[X < Y] = \sum_{x=1}^{N} P[X < Y, X = x] = \sum_{x=1}^{N} P[x < Y, X = x]$$

$$= \sum_{x=1}^{N} P[Y > x] P[X = x] = \sum_{x=1}^{N} \frac{M-x}{M} \frac{1}{N}$$

$$= \sum_{x=1}^{N} \frac{M-x}{M} \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \left(N - \frac{1}{M} \sum_{x=1}^{N} x \right) = \frac{1}{N} \left(N - \frac{1}{M} \frac{N(N+1)}{2} \right) = 1 - \frac{N(N+1)}{2MN}$$

$$P[X = Y] = \sum_{x=1}^{N} P[X = Y, X = x] = \sum_{x=1}^{N} P[Y = x, X = x]$$

$$= \sum_{x=1}^{N} P[Y = x] P[X = x] = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{M} \frac{1}{N} = \frac{1}{M}$$

Ejercicio 7.34. *Sea* X *una variable aleatoria distribuida uniformemente en el conjunto* $\{1, \ldots, N\}$, *en donde* N *es un entero positivo y sea* $M < N$ *otro entero positivo. Encuentre la función de densidad de* $Y = \text{máx}(X, M)$.

Solución

$$f_Y(y) = P\left[\text{máx}(X, M) = y\right] = \begin{cases} P\left[X \leq M\right] & \text{si } y = M \\ P\left[X = y\right] & \text{si } y \in \{M+1, \ldots, N\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{M}{N} & \text{si } y = M \\ \frac{1}{N} & \text{si } y \in \{M+1, \ldots, N\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 7.35. *Sea X una variable aleatoria distribuida uniformemente en el conjunto $\{1, \ldots, N\}$, en donde N es un entero positivo y sea $1 < M \leq N$ otro entero positivo. Encuentre la función de densidad de $Y = \text{mín}(X, M)$.*

Solución

$$f_Y(y) = P\left[\text{mín}(X, M) = y\right] = \begin{cases} P\left[X \geq M\right] & \text{si } y = M \\ P\left[X = y\right] & \text{si } y \in \{1, \ldots, M-1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{N-M+1}{N} & \text{si } y = M \\ \frac{1}{N} & \text{si } y \in \{1, \ldots, M-1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 7.36. *Sean X y Y dos variables aleatorias independientes, ambas con distribución uniforme en el conjunto $\{1, \ldots, N\}$. Encuentre la función de densidad de $Z = \text{máx}(X, Y)$.*

Solución

Si $z \in \{1, \ldots, N\}$, se tiene:

$P\left[Z = z\right] = P\left[\text{máx}(X, Y) = z\right]$

$= P\left[X = z, Y < z\right] + P\left[X < z, Y = z\right] + P\left[X = z, Y = z\right]$

$= \frac{1}{N}\frac{z-1}{N} + \frac{z-1}{N}\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\frac{1}{N} = \frac{2z-1}{N^2}$

Por lo tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2z-1}{N^2} & \text{si } z \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EJERCICIO 7.37. *Sean X y Y dos variables aleatorias independientes, X con distribución geométrica de parámetro p, Y con distribución Poisson de parámetro λ. a) Encuentre $P[X < Y]$ y $P[X > Y]$. b) Determine los valores de p y λ para los cuales $P[X > Y] > P[X < Y]$.*

Solución

$P[X < Y] = \sum_{y=0}^{\infty} P[X < Y, Y = y] = \sum_{y=0}^{\infty} P[X < y, Y = y]$

$= \sum_{y=0}^{\infty} P[X < y] P[Y = y] = \sum_{y=0}^{\infty} [1 - (1-p)^y] P[Y = y]$

$= \sum_{y=0}^{\infty} P[Y = y] - \sum_{y=0}^{\infty} (1-p)^y \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = 1 - e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} [\lambda(1-p)]^y \frac{1}{y!} = 1 - e^{-\lambda p}$

$P[X > Y] = \sum_{y=0}^{\infty} P[X > Y, Y = y] = \sum_{y=0}^{\infty} P[X > y, Y = y]$

$= \sum_{y=0}^{\infty} P[X > y] P[Y = y] = \sum_{y=0}^{\infty} (1-p)^{y+1} P[Y = y]$

$= (1-p) \sum_{y=0}^{\infty} (1-p)^y \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = (1-p) e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} [\lambda(1-p)]^y \frac{1}{y!} = (1-p) e^{-\lambda p}$

$P[X > Y] > P[X < Y]$ cuando $(1-p)e^{-\lambda p} > 1 - e^{-\lambda p}$, es decir, $\lambda < \frac{1}{p} \ln(2-p)$.

EJERCICIO 7.38. *Sean X y Y dos variables aleatorias independientes, ambas con distribución geométrica de parámetro p. Encuentre a) $P[X < Y]$ y $P[X = Y]$ y b) la función de densidad de $Z = \text{mín}(X, Y)$.*

Solución

a. $P[X < Y] = \sum_{y=0}^{\infty} P[X < Y, Y = y] = \sum_{y=0}^{\infty} P[X < y, Y = y]$

$= \sum_{y=0}^{\infty} P[X < y] P[Y = y] = \sum_{y=0}^{\infty} [1 - (1-p)^y] P[Y = y]$

$= \sum_{y=0}^{\infty} P[Y = y] - p \sum_{y=0}^{\infty} (1-p)^{2y} = 1 - \frac{1}{2-p} = \frac{1-p}{2-p}$

$P[X = Y] = \sum_{y=0}^{\infty} P[X = Y, Y = y] = \sum_{y=0}^{\infty} P[X = y, Y = y]$

$= \sum_{y=0}^{\infty} P[X = y] P[Y = y] = \sum_{y=0}^{\infty} (1-p)^y P[Y = y] = p^2 \sum_{y=0}^{\infty} (1-p)^{2y} = \frac{p}{2-p}$

b. Si $z \in \{0, 1, \ldots\}$, se tiene:

$P[Z = z] = P[\text{mín}(X, Y) = z]$

$= P[X = z, Y > z] + P[X > z, Y = z] + P[X = z, Y = z]$

$$= 2p(1-p)^z(1-p)^{z+1} + p^2(1-p)^{2z} = p(2-p)(1-p)^{2z}$$

Por lo tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} p(2-p)(1-p)^{2z} & \text{si } z \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

CAPÍTULO 8

VARIABLES ALEATORIAS ABSOLUTAMENTE CONTINUAS

EJERCICIO 8.1. *En una parada de autobús, el tiempo de llegada de éste se distribuye uniformemente en el intervalo que va de las* $7:00$ *a las* $7:15$ *hrs. y el siguiente autobús pasa exactamente* 15 *minutos después del primero. Si el tiempo de llegada de una persona a esa parada se distribuye uniformemente en el intervalo que va de las* $7:10$ *a las* $7:15$ *hrs. Si* T *es el tiempo que espera la persona, desde que llega a la parada hasta que pasa un autobús, encuentre la distribución de* T.

Solución

Sea X el tiempo de llegada del primer autobús y Y el tiempo de llegada de la persona.

$P[T \leq t] = P[Y \leq X, X - Y \leq t] + P[Y > X, Y - X \geq 15 - t]$

$$= \begin{cases} \frac{25-(5-t)^2+t^2}{150} & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{75-5(15-t)}{75} & \text{si } 5 < t \leq 15 \end{cases} = \frac{t}{15}$$

para $0 \leq t \leq 15$.

Por lo tanto, T tiene distribución uniforme en el intervalo $[0, 15]$.

EJERCICIO 8.2. *Sea* X *una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo* $(0, 1)$. *Encuentre una función de densidad de* $Y = 1 - \sqrt{X}$.

Solución

Para $y \in (0, 1)$, se tiene:

$$P[Y \leq y] = P\left[1 - \sqrt{X} \leq y\right] = P[X \geq (1-y)^2] = 1 - F_X\left((1-y)^2\right)$$

Así que, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & \text{si } y \in (0,1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.3. *Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(-1,1)$. Encuentre una función de densidad de a) $Y = |X|$ y b) $Z = X^2$.*

Solución

a. Para $y \geq 0$, se tiene:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[|X| \leq y] = P[-y \leq X \leq y] = F_X(y) - F_X(-y)$$

Así que, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, Y tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$.

b. Para $z \geq 0$, se tiene:

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[X^2 \leq z] = P[-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}] = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z})$$

Así que, una función de densidad de Z está dada por:

$$f_Z(z) = \tfrac{1}{2\sqrt{z}} f_X(\sqrt{z}) + \tfrac{1}{2\sqrt{z}} f_X(-\sqrt{z}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{z}} & \text{si } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.4. *Sea X una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Encuentre la función de distribución y una función de densidad de $Y = \cos(X)$.*

Solución

Para $y \in [0,1]$ se tiene:

$$P[Y \leq y] = P[\cos(X) \leq y] = 1 - P[-\arccos(y) \leq X \leq \arccos(y)] = 1 - \tfrac{2\arccos(y)}{\pi}$$

Así que:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - \frac{2\arccos(y)}{\pi} & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{si } y \in (0,1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.5. *Sea A un evento que puede ocurrir en algún momento entre los tiempos 0 y T de tal manera que la probabilidad de que ocurra es igual a p y, en caso de que ocurra, si X es el tiempo en el cual ocurre, entonces X tiene distribución uniforme en el intervalo $[0,T]$. Sabiendo que el evento A no ha ocurrido hasta el tiempo $t \in (0,T)$, encuentre la probabilidad de que A ocurra en el intervalo $(t,T]$.*

Solución

Sean:

B: A ocurre en el intervalo $[0,t]$.

C: A ocurre en el intervalo $(t,T]$.

D: A ocurre en el intervalo $[0,T]$.

Se sabe:

$P(D) = p$

$P(B \mid D) = \frac{t}{T}$

$P(C \mid D) = \frac{T-t}{T}$

Así que:

$P(B) = P(B \mid D)P(D) + P(B \mid D^c)P(D^c) = \frac{t}{T}p$

$P(C) = P(C \mid D)P(D) + P(C \mid D^c)P(D^c) = \frac{T-t}{T}p$

Por lo tanto:

$\frac{T-t}{T}p = P(C) = P(C \mid B)P(B) + P(C \mid B^c)P(B^c) = P(C \mid B^c)(1 - \frac{t}{T}p)$

De manera que:

$P(C \mid B^c) = \frac{T-t}{T-pt}p$

EJERCICIO 8.6. *Sea X una variable aleatoria con distribución normal de parámetros μ y σ^2. Encuentre $P[|X-\mu| \leq \sigma]$.*

Solución

$P[|X-\mu| \leq \sigma] = P[-\sigma \leq X-\mu \leq \sigma] = P\left[-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-x^2/2} dx = 0.682689$

EJERCICIO 8.7. *Supongamos que el peso, X, de una persona, que se selecciona al azar de una determinada población, se distribuye normalmente con parámetros μ y σ^2. Si $P[X \leq 70] = 1/2$ y $P[X \leq 60] = 1/4$, encuentre μ, σ y $P[X \geq 80]$. ¿Qué porcentaje de la gente de la población que pesa al menos 80 kilos, pesa más de 90 kilos?*

Solución

Se tiene:

$P[X \leq 70] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{70-\mu}{\sigma}\right] = 0.5$

$P[X \leq 60] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{60-\mu}{\sigma}\right] = 0.25$

Además, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2} dx = 0.5$ y de las tablas de la distribución normal estándar, se obtiene:

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-.675} e^{-x^2/2} dx = 0.25$

Por lo tanto:

$\frac{70-\mu}{\sigma} = 0 \frac{60-\mu}{\sigma} = -0.675$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene $\mu = 70$, $\sigma = 14.8148$.

Para calcular $P[X \geq 80]$ no se requiere el valor de σ, en efecto, se tiene:

$P[X \geq 80] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{80-70}{\sigma}\right] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{60-70}{\sigma}\right] = P[X \leq 60] = 0.25$

Por otra parte:

$P[X > 90 \mid X \geq 80] = \frac{P[X>90]}{P[X\geq 80]} = 4P[X > 90] = 4P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{90-70}{14.8148}\right]$

$= 4P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} > 1.35\right] = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_{1.35}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 0.354032$

EJERCICIO 8.8. *Sea X una variable aleatoria distribuida normalmente con parámetros $\mu = 1$ y $\sigma^2 = 4$. Encuentre $P\left[5 \leq X^2 + 1 \leq 10\right]$.*

Solución

$P\left[5 \leq X^2 + 1 \leq 10\right] = P\left[4 \leq X^2 \leq 9\right]$

$= P\left[2 \leq X \leq 3\right] + P\left[-3 \leq X \leq -2\right] = P\left[\frac{1}{2} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right] + P\left[-2 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq -\frac{3}{2}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{.5}^{1} e^{-x^2/2}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{-1.5} e^{-x^2/2}dx = 0.149882 + 0.0440571 = 0.193939$

EJERCICIO 8.9. *Se ha determinado que en una determinada región la precipitación anual de lluvia tiene distribución normal. Si las estadísticas muestran que en el 15% de los casos la precipitación ha sido de más de 45 pulgadas y en el 3% ha sido de menos de 30 pulgadas, ¿cuál es la probabilidad de que en los próximos 5 años, por lo menos en uno de ellos la precipitación sea de más de 50 pulgadas?*

Solución

Sea X la precipitación anual de lluvia. Se tiene entonces:

$P\left[X > 45\right] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{45-\mu}{\sigma}\right] = 0.15$

$P\left[X < 30\right] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{30-\mu}{\sigma}\right] = 0.03$

De las tablas de la distribución normal estándar, se tiene:

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1.04}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = .15 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1.88} e^{-x^2/2}dx = 0.03$

Por lo tanto:

$\frac{45-\mu}{\sigma} = 1.04 \frac{30-\mu}{\sigma} = -1.88$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene $\mu = 39.6575$, $\sigma = 5.13702$; así que:

$P\left[X > 50\right] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{50-39.6575}{5.13702}\right] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} > 2.01\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2.01}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 0.0222$

Sea Y el número de años, entre los próximos 5, en los cuales la precipitación será de más de 50 pulgadas. Y tiene entonces distribución binomial con parámetros $n = 5$ y $p = 0.0222$; por lo tanto:

$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] = 1 - (0.9778)^5 = 0.10618$

Ejercicio 8.10. *En una fábrica se producen componentes electrónicos cuyo voltaje tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2. El departamento de control de calidad checa los componentes y todos aquellos con un voltaje menor o igual a b son rechazados. Encuentre la distribución del voltaje de los componentes que pasan el control de calidad.*

Solución

Sea Y el voltaje de un componente seleccionado al azar entre la población original y X el voltaje de un componente seleccionado al azar entre aquellos que pasan el control de calidad.

$F_X(x) = P\,[X \leq x] = P\,[Y \leq x \mid Y > b]$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \frac{P[b<Y\leq x]}{P[Y>b]} & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \frac{1}{P[Y>b]}\left[F_Y(x) - F_Y(b)\right] & \text{en otro caso} \end{cases}$

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{P[Y>b]} f_Y(x) & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{1}{\int_b^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right\}dy} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 8.11. *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n = 1{,}000$ y $p = 0.3$. Utilice el teorema de de Moivre-Laplace para estimar $P[X = 310]$. Encuentre además el valor exacto de esa probabilidad y compare los resultados. Con los mismos datos, estime $P[280 < X < 310]$.*

Solución

$P[X = 310] = \binom{1{,}000}{310}(0.3)^{310}(0.7)^{690} = 0.0215234$

Utilizando el teorema de de Moivre-Laplace, se tiene:

$P[X = 310] = P\left[\frac{X-np}{\sqrt{npq}} = \frac{310-300}{\sqrt{210}}\right]$

$= P\left[\frac{X-np}{\sqrt{npq}} = 0.690066\right] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{210}}e^{-(0.690066)^2/2} = 0.0216969$

El error que se comete con el teorema de de Moivre-Laplace, para estimar $P[X = 310]$, es de menos de $\frac{2}{10{,}000}$.

Si Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, se tiene:

$P[280 < X < 310] \approx P\left[\frac{280.5-300}{\sqrt{210}} \leq Z \leq \frac{309.5-300}{\sqrt{210}}\right] = P[-1.34563 \leq Z \leq 0.655562]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1.34563}^{0.655562} e^{-x^2/2}dx = 0.654736$

Ejercicio 8.12. *Supongamos que la probabilidad de que un recién nacido sea hombre es igual a* 0.515*. Estime la probabilidad de que entre* 10 *mil recién nacidos, haya más hombres que mujeres.*

Solución

Sea X el número de hombres que hay entre $10,000$ recién nacidos. X tiene entonces distribución binomial con parámetros $n = 10,000$ y $p = 0.515$. Utilizando el teorema de de Moivre-Laplace, se tiene:

$P[X > 5,000] \approx P\left[Z \geq \frac{5000.5-5150}{\sqrt{(5150)(.485)}}\right] = P[Z \geq -2.99135]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2.99135}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 0.998611$

donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar.

Ejercicio 8.13. *Un cierto tipo de semilla tiene una probabilidad de germinar igual a* 0.8*. Estime la probabilidad de que, en un paquete de* $1,000$ *semillas, por lo menos el* 65% *germinará.*

Solución

Sea X el número de semillas que germinan del paquete de $1,000$. X tiene entonces distribución binomial con parámetros $n = 1,000$ y $p = 0.8$. Utilizando el teorema de de Moivre-Laplace, se tiene:

$P[X \geq 650] \approx P\left[Z \geq \frac{649.5-800}{\sqrt{160}}\right] = P[Z \geq -11.8981] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-11.8981}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \approx 1$

donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar.

Ejercicio 8.14. *Estime la probabilidad de que al lanzar* $10,000$ *veces un dado se obtengan por lo menos* 1680 1*'s.*

Solución

Sea X el número de 1's que se obtienen. X tiene entonces distribución binomial con parámetros $n = 10,000$ y $p = \frac{1}{6}$. Utilizando el teorema de de Moivre-Laplace, se tiene:

$P\left[X \geq 1680\right] \approx P\left[Z \geq \frac{1679.5 - \frac{5000}{3}}{\frac{1}{6}\sqrt{50000}}\right] = P\left[Z \geq 0.34435\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0.34435}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 0.36529$

en donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar.

Ejercicio 8.15. *Estime el más pequeño número natural* k *tal que la probabilidad de que el número de soles que se obtienen en* $1,000$ *lanzamientos de una moneda esté comprendido entre* 480 *y* k*, inclusive, sea mayor que* 0.6*.*

Solución

Sea X el número de soles que se obtienen en $1,000$ lanzamientos de una moneda. X tiene entonces distribución binomial con parámetros $n = 1,000$ y $p = \frac{1}{2}$ y se está buscando el más pequeño número natural k tal que $P\left[480 \leq X \leq k\right] > 0.6$

Utilizando el teorema de de Moivre-Laplace, se tiene:

$P\left[480 \leq X \leq k\right] = P\left[479.5 \leq X \leq k + .5\right]$

$= P\left[\frac{479.5-500}{\sqrt{250}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{k+0.5-500}{\sqrt{250}}\right] = P\left[-1.29653 \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{k-499.5}{\sqrt{250}}\right]$

$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.29653}^{z} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1.29653} e^{-x^2/2} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx - 0.0973965$

en donde $z = \frac{k-499.5}{\sqrt{250}}$.

Por lo tanto, se tiene $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} > 0.6973965$, así que, $z > 0.517$ y entonces el más pequeño número natural k que satisface la propiedad deseada es $k = 508$.

EJERCICIO 8.16. *Supongamos que el tiempo de vida, en horas, de un cierto producto tiene distribución exponencial con parámetro* $\lambda = \frac{1}{50}$. *Consideremos una población compuesta por* 100 *de esos productos y sea* X *el número de productos en la población que duran más de* 50 *horas. Estime* $P[X > 40]$.

Solución

Si T es el tiempo de vida del producto, se tiene $P[T > 50] = e^{-1}$. Por otra parte, X tiene distribución binomial con parámetros $n = 100$ y $p = P[T > 50] = e^{-1}$. Por lo tanto, utilizando el teorema de de Moivre-Laplace, se tiene:

$$P[X > 40] \approx P\left[Z \geq \frac{40.5-100e^{-1}}{\sqrt{100e^{-1}(1-e^{-1})}}\right] = P[Z \geq 0.769771]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0.769771}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 0.220718$$

en donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar.

EJERCICIO 8.17. *Utilice el teorema de de Moivre-Laplace para estimar el más pequeño valor de* n *con la propiedad de que al lanzar* n *veces una moneda, la probabilidad de que el porcentaje de las veces en que se obtiene sol esté comprendido entre* 49% *y* 51% *sea mayor o igual a* 0.95.

Solución

Sea X el número de soles que se obtienen al lanzar n veces la moneda. X tiene entonces distribución binomial con parámetros n y $p = \frac{1}{2}$.

Por otra parte, se quiere $P\left[0.49 \leq \frac{X}{n} \leq 0.51\right] \geq 0.95$; es decir:

$P[0.49n \leq X \leq 0.51n] \geq 0.95\}$

En otras palabras, se busca n tal que:

$$P\left[-0.02\sqrt{n} \leq \frac{X-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq 0.02\sqrt{n}\right] \geq 0.95$$

Por el teorema de de Moivre-Laplace, se tiene:

$$P\left[-0.02\sqrt{n} \leq \frac{X-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq 0.02\sqrt{n}\right] \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{0.02\sqrt{n}} e^{-x^2/2} dx$$

De las tablas de la distribución normal estándar, se tiene:

$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1.96} e^{-x^2/2} dx = 0.95$

Así que, para que n satisfaga la relación deseada, se debe tener $0.02\sqrt{n} \geq 1.96$; es decir, $n \geq (98)^2 = 9604$.

EJERCICIO 8.18. *Las bombillas o focos producidos en una cierta fábrica tienen un tiempo de vida que se distribuye exponencialmente y se sabe que el* $50\,\%$ *de los focos que se producen tienen un tiempo de vida mayor a* $1,000$ *horas. Estime la probabilidad de que entre* $1,000$ *focos, seleccionados al azar de la producción de esa fábrica, haya más de* 275 *con un tiempo de vida superior a* $2,000$ *horas.*

Solución

T: Tiempo de vida de cada foco.

X: Número de focos, entre los $1,000$, con un tiempo de vida superior a $2,000$ horas.

X tiene distribución binomial con parámetros $n = 1,000$ y $p = P\,[T > 2,000]$.

Se tiene $P\,[T > 1,000] = e^{-1,000\lambda} = 0.5$; así que $\lambda = \frac{\ln 2}{1,000} = 0.000693147$

Por lo tanto, $p = P\,[T > 2,000] = e^{-2,000\lambda} = e^{-2\ln 2} = 0.25$

Finalmente, utilizando el teorema de de Moivre Laplace, se tiene:

$P\,[X > 275] \approx P\left[Z \geq \frac{275.5-250}{\sqrt{187.5}}\right] = P\,[Z \geq 1.86226]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1.86226}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 0.0312832$

donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar.

EJERCICIO 8.19. *Sea* X *una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro* λ *y supongamos que* $P\,[X \geq 10] = \frac{1}{2}$. *Encuentre un número* t *tal que* $P\,[X \geq t] = 0.9$.

Solución

$P\,[X \geq t] = e^{-\lambda t}$, así que $t = -\frac{\ln 0.9}{\lambda} = -\frac{10 \ln 0.9}{\ln 2} = 1.52$.

EJERCICIO 8.20. *La vida de una partícula radioactiva se modela frecuentemente con una distribución exponencial y se define la vida media de la partícula como el tiempo que transcurre hasta que la radioactividad de la partícula se reduce a la mitad. Si la* *vida media del uranio es de* 7.13×10^{-8} *años, determine el tiempo que se requiere para que la radioactividad de una masa de uranio se reduzca un* $90\,\%$.

Solución

Sea T el tiempo de vida de una partícula radioactiva, entonces:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, si t_0 es la vida media de la partícula, se sabe que $P\left[T \leq t_0\right] = 0.5$; por lo tanto, $1 - e^{-\lambda t_0} = 0.5$; así que $\lambda = \frac{1}{t_0} \ln 2$. Por otra parte, se busca t tal que $P\left[T \leq t\right] = 0.9$, es decir, tal que $1 - e^{-\lambda t} = 0.9$, así que:

$$t = \tfrac{1}{\lambda} \ln 10 = t_0 \tfrac{1}{\ln 2} \ln 10 = 3.3219 t_0 = (3.3219)(7.13 \times 10^{-8}) = 2.3\,685 \times 10^{-7}$$

EJERCICIO 8.21. *Supongamos que se tiene un número muy grande de partículas radioactivas, cada una de las cuales tiene un tiempo de estabilización que se distribuye exponencialmente con parámetro* λ. *Si la mitad de las partículas se estabiliza durante el primer segundo, ¿cuánto tiempo se requiere para que se estabilice el* $75\,\%$ *de ellas?*

Solución

Sea T el tiempo de estabilización de una partícula radioactiva, entonces:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además se sabe que $P\left[T \leq 1\right] = 0.5$; por lo tanto, $1 - e^{-\lambda} = 0.5$; así que $\lambda = \ln 2$. Por otra parte, se busca t tal que $P\left[T \leq t\right] = 0.75$, es decir, tal que $1 - e^{-\lambda t} = 0.75$, así que $t = \frac{2 \ln 2}{\lambda} = 2$. Por lo tanto, se requieren 2 segundos para que se estabilice el 75% de las partículas.

EJERCICIO 8.22. *Sea* T *una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad continua y tal que, para cualquier par de números reales positivos* s *y* t, *se tiene:*

$$P\left[T > t + s \mid T > t\right] = P\left[T > s\right]$$

Demuestre que T *tiene distribución exponencial.*

Solución

$P[T > s] = P[T > t + s \mid T > t] = \frac{P[T>t+s, T>t]}{P[T>t]} = \frac{P[T>t+s]}{P[T>t]}$

Así que:

$P[T > t + s] = P[T > t] \, P[T > s]$

Sea $g(t) = P[T > t]$. Entonces, $g(t + s) = g(t)g(s)$, así que, $g'(t) = g(t)g'(0)$.

Sea $\lambda = -g'(0)$. Entonces se tiene $g'(t) = -\lambda g(t)$, así que $g(t) = e^{-\lambda t}$

Ejercicio 8.23. *Una cierta máquina funciona bien únicamente si por lo menos 3 de sus 5 motores funcionan. Cada motor opera independientemente de los otros y el tiempo T que permanece funcionando tiene como función de densidad a $f(x) = xe^{-x}$ para $x > 0$. Asumiendo que los 5 motores se ponen a funcionar al mismo tiempo, encuentre la distribución del tiempo que la máquina funciona bien.*

Solución

Sea X_t el número de motores que permanecen funcionando después del tiempo t y $p_t = P[T > t]$, entonces X_t tiene distribución binomial con parámetros $n = 5$ y $p = p_t$; de manera que si Y es el tiempo que la máquina funciona bien, se tiene:

$F_Y(t) = P[Y \leq t] = 1 - P[Y > t] = 1 - P[X_t \geq 3] = 1 - \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} p_t^k (1 - p_t)^{5-k}$

en donde $p_t = \int_t^\infty xe^{-x} dx = (1 + t)e^{-t}$.

Así que:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 1 - 10(1+t)^3 e^{-3t} + 15(1+t)^4 e^{-4t} - 6(1+t)^5 e^{-5t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(t) = \begin{cases} 30t\,(1+t)^2 e^{-3t} - 60t\,(1+t)^3 e^{-4t} + 30t\,(1+t)^4 e^{-5t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 30t\,(1+t)^2 e^{-3t} \left[1 - (1+t)\, e^{-t}\right]^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.24. *El tiempo, en horas, que le toma a un técnico reparar una máquina tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda = 2$. ¿Cuál es la probabilidad de que ese técnico pueda reparar 3 máquinas en menos de 2 horas?*

Solución

Sea X el tiempo que le toma al técnico reparar 3 máquinas. X tiene entonces distribución gama con parámetros $\lambda = 2$ y $\alpha = 3$; por lo tanto:

$P[X < 2] = \int_0^2 4x^2 e^{-2x} dx = 0.761897$

Ejercicio 8.25. *Sea* $Y = (X-3)^2 + 1$, *en donde* X *es una variable aleatoria con distribución gama de parámetros* $\alpha = 2$ *y* λ. *Encuentre* $P[Y \geq 5]$.

Solución

$P[Y \geq 5] = 1 - P[(X-3)^2 < 4] = 1 - P[-2 < X - 3 < 2] = 1 - P[1 < X < 5]$

$= 1 - \lambda^2 \int_1^5 xe^{-\lambda x} dx = 1 + 5e^{-5\lambda}\lambda + e^{-5\lambda} - e^{-\lambda}\lambda - e^{-\lambda} = 1 + e^{-5\lambda}(5\lambda+1) - e^{-\lambda}(\lambda+1)$

Ejercicio 8.26. *Sea* X *una variable aleatoria con distribución gama de parámetros* α *y* λ. *Encuentre la distribución de* $Y = cX$, *donde* c *es una constante positiva.*

Solución

Para $y > 0$, se tiene:

$P[Y \leq y] = P[cX \leq y] = P\left[X \leq \frac{y}{c}\right] = F_X(\frac{y}{c})$

Así que, una función de densidad de Y está dada por:

$f_Y(y) = \frac{1}{c} f_X(\frac{y}{c}) = \frac{1}{c} \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{c}y}}{c^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{c}y}}{\Gamma(\alpha)}$

Así que Y tiene distribución gama con parámetros α y $\frac{\lambda}{c}$.

Ejercicio 8.27. *Supongamos que la vida en horas de cada lámpara, de una cierta clase, es una variable aleatoria* T *con función de densidad dada por:*

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{100}{t^2} & si\ t > 100 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que de 4 *de esas lámparas, a) ninguna tenga que ser sustituida durante las primeras* 150 *horas de uso? y b) las* 4 *tengan que reemplazarse durante las primeras* 150 *horas de uso?*

Solución

$P[T > 150] = \int_{150}^{\infty} \frac{100}{t^2} dt = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}$

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.19753$

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0.012346$

Ejercicio 8.28. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar, un punto al interior del triángulo formado por la recta $y = -x + 1$ y los ejes coordenados. Sea Y la distancia del punto seleccionado al eje y. Encuentre una función de densidad de Y.*

Solución

Para $y \in (0, 1)$, se tiene:

$P[Y \leq y] = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - y)^2\right] = 2y - y^2.$

Así que, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1 - y) & \text{si } y \in (0, 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.29. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar, un punto sobre la base AB de un triángulo equilátero ABC cuyos lados miden 2 unidades cada uno. Sea X la distancia del punto seleccionado al vértice C. Encuentre una función de densidad de X.*

Solución

Para $x \in \left[\sqrt{3}, 2\right]$, se tiene:

$P[X \leq x] = \frac{2\sqrt{x^2-3}}{2} = \sqrt{x^2 - 3}$

Así que:

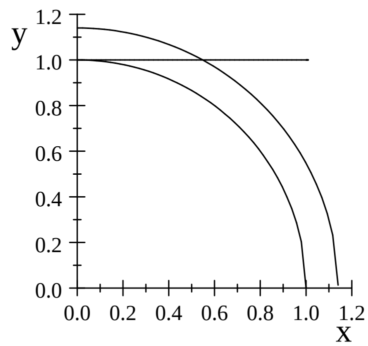
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \sqrt{3} \\ \sqrt{x^2 - 3} & \text{si } x \in \left[\sqrt{3}, 2\right] \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, una función de densidad de X está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} & \text{si } x \in \left(\sqrt{3}, 2\right) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EJERCICIO 8.30. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar al azar un punto (x, y) del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Sea X la distancia del punto seleccionado al origen. Encuentre una función de densidad de X.*

Solución



$$F_X(x) = P\left[X \leq x\right] = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4}\pi x^2 - 2\int_1^x \sqrt{x^2 - u^2}du & \text{si } 1 < x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}\pi x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4}\pi x^2 - 2x^2\int_{\frac{1}{x}}^1 \sqrt{1 - v^2}dv & \text{si } 1 < x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Así que, una función de densidad de X está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}\pi x - \frac{2}{x}\sqrt{x^2 - 1} - 4x\int_{\frac{1}{x}}^1 \sqrt{1 - v^2}dv & \text{si } 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\pi x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}\pi x - \frac{2}{x}\sqrt{x^2 - 1} - 4x\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) & \text{si } 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\pi x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x\operatorname{arcsen}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\pi x & \text{si } 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.31. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar al azar un punto (x, y) del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Sea Z la suma $x + y$. Encuentre una función de densidad de Z.*

Solución

$$P[Z \leq z] = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{(1-z)^2}{2} & \text{si } 1 < z \leq 2 \end{cases}$$

Así que, una función de densidad de Z está dada por:

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 2 - z & \text{si } 1 < z \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.32. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar, al azar, un punto en el interior del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Sea X la distancia del punto seleccionado a la diagonal de pendiente 1. Encuentre una función de densidad de X.*

Solución

Para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$, se tiene:

$$P[X \leq x] = 1 - \left(1 - x\sqrt{2}\right)^2$$

Así que, una función de densidad de X está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - x\sqrt{2}\right)^2 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right] \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\left(1 - x\sqrt{2}\right) & \text{si } x \in \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.33. *Un experimento aleatorio consiste en seleccionar al azar un punto en el interior del rombo de vértices $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(0, -1)$ y $(-2, 0)$. Sea X la distancia del punto seleccionado a la diagonal menor del rombo. Encuentre una función de densidad de X.*

Solución

Para $0 \leq x \leq 2$, se tiene:

$P[X \leq x] = \frac{1}{4}\left[4 - 2(2-x)(1-\frac{1}{2}x)\right] = \frac{1}{4}\left[4 - (2-x)^2\right] = 1 - \frac{1}{4}(2-x)^2$

Así que, una función de densidad de X está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.34. *Dos personas A y B juegan el siguiente juego: cada persona elige al azar, de manera independiente de la otra, un punto sobre el intervalo $(0,1)$. Si la distancia entre los dos puntos seleccionados es menor que una cantidad d, fija de antemano, el juego es ganado por A; de otra manera, el juego es ganado por B. Encuentre el valor de d para el cual ambas personas tienen la misma probabilidad de ganar el juego.*

Solución

Sean X y Y los puntos seleccionados, entonces:

$$P[|Y-X| \leq d] = \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0 \\ 1-(1-d)^2 & \text{si } 0 \leq d < 1 \\ 1 & \text{si } d \geq 1 \end{cases}$$

Se busca d tal que $P[|Y-X| \leq d] = \frac{1}{2}$, así que $d = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.2929$

COMPLEMENTO

$$f_{|Y-X|}(d) = \begin{cases} 2(1-d) & \text{si } 0 < d < 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que $d < E[|Y-X|] = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 8.35. *Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f. Encuentre una función de densidad de $Y = aX + b$, en donde a y b son constantes y $a \neq 0$. Aplique el resultado al caso en que X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$.*

Solución

Si $a = 0$, Y es constante, así que, por ser discreta, no admite una función de densidad. Supongamos ahora que $a \neq 0$; se tiene entonces:

$$P[Y \leq y] = P[aX + b \leq y] = \begin{cases} P[X \leq \frac{y-b}{a}] = F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{si } a > 0 \\ P[X \geq \frac{y-b}{a}] = 1 - F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Así que, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y) = \tfrac{1}{|a|} f(\tfrac{y-b}{a})$$

Para el caso en que X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, se tiene:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } 0 < \frac{y-b}{a} < 1 \text{ y } a > 0 \\ -\frac{1}{a} & \text{si } 0 < \frac{y-b}{a} < 1 \text{ y } a < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } b < y < a + b \text{ y } a > 0 \\ -\frac{1}{a} & \text{si } b + a < y < b \text{ y } a < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En este caso, se concluye entonces que si $a > 0$, Y tiene distribución uniforme en el intervalo $(b, a+b)$, mientras que si $a < 0$, Y tiene distribución uniforme en el intervalo $(a + b, b)$.

Ejercicio 8.36. *Sea X una variable aleatoria continua, no negativa, con función de densidad f. Encuentre una función de densidad de $Y = \sqrt{X}$. Aplique el resultado al caso en que X tiene distribución gama con parámetros α y λ.*

Solución

Para $y > 0$, se tiene:

$$P[Y \leq y] = P\left[\sqrt{X} \leq y\right] = P[X \leq y^2] = F_X(y^2)$$

Así que, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2yf(y^2) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para el caso en que X tiene distribución gama con parámetros α y λ, se tiene:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{2\alpha-1} e^{-\lambda y^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.37. *Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f. Encuentre una función de densidad de $Y = |X|$. Aplique el resultado al caso en que X tiene distribución a) normal con parámetros μ y σ^2 y b) uniforme en el intervalo $(-1, 2)$.*

Solución

Para $y > 0$, se tiene:

$P[Y \leq y] = P[|X| \leq y] = P[-y \leq X \leq y] = F_X(y) - F_X(-y)$

Así que, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f(y) + f(-y) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} + e^{-(y+\mu)^2/2\sigma^2} \right] & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

b. $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } y \in (0,1) \\ \frac{1}{3} & \text{si } y \in [1,2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 8.38. *Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f. Encuentre una función de densidad de $Y = e^X$. Aplique el resultado al caso en que X tiene distribución a) normal con parámetros μ y σ^2 y b) gama con parámetros α y λ.*

Solución

Para $y > 0$, se tiene:

$P[Y \leq y] = P\left[e^X \leq y\right] = P[X \leq \ln y] = F_X(\ln y)$

Así que, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} f(\ln y) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln y-\mu)^2/2\sigma^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

b. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}(\ln y)^{\alpha-1}e^{-\lambda \ln y} & \text{si } y > 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{1}{y^{\lambda+1}\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}(\ln y)^{\alpha-1} & \text{si } y > 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 8.39. *Una función de densidad f, de una variable aleatoria continua X, está dada por la fórmula siguiente:*

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & si\ 0 < x < 1 \\ \frac{x}{2} & si\ 1 \leq x < 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde c es una constante. Encuentre una función de densidad de la variable aleatoria $Y = (1-X)^2$.

Solución

$\int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{3}{4}$, así que $\int_0^1 cx^2dx = \frac{1}{4}$; por lo tanto $c = \frac{3}{4}$.

Para $0 < y < 1$, se tiene:

$P[Y \leq y] = P[(1-X)^2 \leq y] = P\left[1 - \sqrt{y} \leq X \leq 1 + \sqrt{y}\right]$

$= F_X(1+\sqrt{y}) - F_X(1-\sqrt{y})$

Así que, una función de densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y) = f_X(1+\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(1-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\frac{1+\sqrt{y}}{2} + \frac{3}{4}(1-\sqrt{y})^2}{2\sqrt{y}} = \frac{3y-4\sqrt{y}+5}{8\sqrt{y}}$$

Por lo tanto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3y-4\sqrt{y}+5}{8\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8.40. *Muestre con un ejemplo que si X no es continua entonces la distribución de $F_X(X)$ no necesariamente es uniforme.*

Solución

Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p, entonces:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[[x]]} p(1-p)^k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-p)^{[[x]]+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(X) = 1-(1-p)^{[[x]]+1} = 1-(1-p)^{X+1}$$

Ejercicio 8.41. *Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X continua y estrictamente creciente y definamos la función $d : (0,1) \mapsto R$ mediante la relación $d(t) = \text{ínf}\,\{s \in \mathbb{R} : F_X(s) \geq t\}$. Demuestre que d es la inversa de F_X.*

Solución

Se tiene $\text{lím}_{x \rightsquigarrow -\infty} F_X(x) = 0$ y $\text{lím}_{x \rightsquigarrow \infty} F_X(x) = 1$, así que, como F_X es continua, dado $t \in (0,1)$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(x) = t$ y entonces $d(t) = \text{ínf}\,\{s \in \mathbb{R} : F_X(s) = t\}$, así que, nuevamente por ser F_X continua, $F_X(d(t)) = t$.

Por otra parte, dado $x \in \mathbb{R}$, sea $t = F_X(x)$, entonces, como F_X es estrictamente creciente, $F_X(s) < t$ para cualquier $s < x$, así que $d(t) = \text{ínf}\,\{s \in \mathbb{R} : F_X(s) \geq F_X(x)\} = x$, es decir, $d(F_X(x)) = x$.

Ejercicio 8.42. *Demuestre directamente que si Y tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, entonces, dado $\lambda > 0$, $-\frac{1}{\lambda}\ln Y$ tiene distribución exponencial con parámetro λ.*

Solución

Sea $X = -\frac{1}{\lambda}\ln Y$, entonces:

$$F_X(X) = P\left[X \leq x\right] = P\left[-\tfrac{1}{\lambda}\ln Y \leq x\right] = P\left[\ln Y \geq e^{-\lambda x}\right] = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Así que X tiene distribución exponencial con parámetro λ.

Ejercicio 8.43. *Demuestre directamente que si Y tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, entonces, dado $p \in (0,1)$, $\left[\left[\frac{\ln Y}{\ln(1-p)}\right]\right]$ tiene distribución geométrica con parámetro p, en donde $[[x]]$ es el mayor entero menor o igual a x.*

Solución

Sea $X = \left[\left[\frac{\ln Y}{\ln(1-p)}\right]\right]$, entonces:

$P[X = x] = P\left[x \leq \frac{\ln Y}{\ln(1-p)} < x + 1\right] = P\left[(1-p)^{x+1} < Y \leq (1-p)^x\right]$

$= \begin{cases} (1-p)^x - (1-p)^{x+1} & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Así que X tiene distribución geométrica con parámetro p.

Ejercicio 8.44. *Demuestre directamente que si $p \in (0, 1)$, $\lambda = -\ln(1-p)$ y Z es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ, entonces, $[[Z]]$ tiene distribución geométrica con parámetro p, en donde $[[x]]$ es el mayor entero menor o igual a x.*

Solución

Sea $X = [[Z]]$, entonces:

$P[X = x] = P[x \leq Z < x + 1] = \int_x^{x+1} \lambda e^{-\lambda y} dy = \begin{cases} e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(x+1)} & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$= \begin{cases} e^{x \ln(1-p)} - e^{(x+1)\ln(1-p)} & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$= \begin{cases} (1-p)^x - (1-p)^{x+1} & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$= \begin{cases} p(1-p)^x & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Así que X tiene distribución geométrica con parámetro p.

Ejercicio 8.45. *Demuestre directamente que si Y tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, entonces, dado $\lambda > 0$:*

$c(Y) = \text{ínf}\left\{j \in \{0, 1, \ldots\} : \sum_{k=0}^{j} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} > Y\right\}$

tiene distribución Poisson con parámetro λ.

Solución

Sea $X = \text{ínf}\left\{j \in \{0, 1, \ldots\} : \sum_{k=0}^{j} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} > Y\right\}$, entonces:

$$P[X = x] = P\left[\sum_{k=0}^{x-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \leq Y, \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} > Y\right]$$

$$= P\left[\sum_{k=0}^{x-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \leq U < \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right]$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \sum_{k=0}^{x-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así que X tiene distribución Poisson con parámetro λ.

CAPÍTULO 9

ESPERANZAS

Ejercicio 9.1. *Utilice el método del ejemplo 9.5 para calcular la esperanza de una variable aleatoria X con distribución Poisson de parámetro λ.*

Solución

$E\left[X\right]=\sum_{x=0}^{\infty}xP\left[X=x\right]=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$

Ejercicio 9.2. *Utilice el método del ejemplo 9.6 para calcular la esperanza de una variable aleatoria X con distribución a) binomial de parámetros n y p y b) binomial negativa de parámetros r y p.*

Solución

a. $E[X]=\sum_{k=0}^{n}kf_X(k)=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$=(1-p)^n\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k-1}=p(1-p)^{n+1}\frac{d}{dp}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k}$

$=p(1-p)^{n+1}\frac{d}{dp}\left[\left(\frac{p}{1-p}+1\right)^{n}-1\right]=p(1-p)^{n+1}\frac{d}{dp}\left[\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n}-1\right]$

$=p(1-p)^{n+1}n\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-1}\frac{1}{(1-p)^2}=np$

b. $E[X]=p^r\sum_{k=0}^{\infty}k\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k=-p^r(1-p)\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k$

$=-p^r(1-p)\frac{d}{dp}p^{-r}=p^r(1-p)rp^{-r-1}=r\frac{1-p}{p}$

Ejercicio 9.3. *Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:*

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2x}{N(N+1)} & si\ x\in\{1,\ldots,N\}\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$$

donde N es un entero positivo. Encuentre $E[X]$.

Solución

$E(X) = \sum_{x=1}^{N} x f_X(x = \sum_{x=1}^{N} x \frac{2x}{N(N+1)} = \frac{2}{N(N+1)} \sum_{x=1}^{N} x^2$

$= \frac{2}{N(N+1)} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{2N+1}{3}$

EJERCICIO 9.4. *Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x!} & si\ x \in \{2,3,\ldots\} \\ 3-e & si\ x = 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Encuentre $E[X]$.

Solución

$E[X] = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x!} = e - 1$

EJERCICIO 9.5. *Un juego popular en Inglaterra consiste en el lanzamiento de 3 dados. Un jugador puede apostar a cualquiera de los números enteros entre 1 y 6. Si se obtiene ese número en exactamente uno de los 3 lanzamientos, se gana lo mismo que se apostó; si se obtiene en exactamente dos de los 3 lanzamientos, se gana el doble de la apuesta y si se obtiene en los 3 lanzamientos se gana el triple de la apuesta. Por otro lado, si no se obtiene el número en ninguno de los 3 lanzamientos, el jugador pierde la apuesta. Encuentre la esperanza de la ganancia (o pérdida) de un jugador que apuesta un peso en dicho juego.*

Solución

Sea X la ganancia en el juego, entonces:

$$P[X=x] = \begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^3 & \text{si } x=-1 \\ \binom{3}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 & \text{si } x=1 \\ \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} & \text{si } x=2 \\ \left(\frac{1}{6}\right)^3 & \text{si } x=3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{125}{216} & \text{si } x=-1 \\ \frac{75}{216} & \text{si } x=1 \\ \frac{15}{216} & \text{si } x=2 \\ \frac{1}{216} & \text{si } x=3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así que, $E[X] = -\frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{30}{216} + \frac{3}{216} = -\frac{17}{216}$

EJERCICIO 9.6. *Un juego consiste en el lanzamiento de n dados. Un jugador elige un número entero entre 1 y 6. Por cada dado con el cual se obtenga ese número el jugador gana 1 peso. Por otro lado, si no se obtiene el número en ninguno de los n lanzamientos, el jugador pierde n pesos. a) Encuentre la esperanza de la ganancia del jugador. b) ¿Cuál es el más pequeño valor de n con el cual la esperanza de la ganancia es positiva?*

Solución

a. Sea X la ganancia en el juego, entonces:

$$P[X=x]=\begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^n & \text{si } x=-n \\ \binom{n}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} & \text{si } x\in\{1,\ldots,n\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así que, $E[X]=\frac{n}{6}-n\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

b. Para que la esperanza de la ganancia sea positiva se requiere que $\frac{n}{6}-n\left(\frac{5}{6}\right)^n>0$, es decir $n>\frac{\ln 6}{\ln 6-\ln 5}=9.8275$, de manera que el más pequeño valor de n que satisface la propiedad requerida es $n=10$.

EJERCICIO 9.7. *Una urna contiene N tarjetas numeradas del 1 al N. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar n tarjetas al azar y sin reemplazo. Encuentre el valor esperado del número más grande en la muestra.*

Solución

$P[X=k]=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$, para $k\in\{n,\ldots,N\}$.

$E[X]=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N}k\binom{k-1}{n-1}=\frac{n}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}=\frac{n}{\binom{N}{n}}\binom{N+1}{n+1}=\frac{n(N+1)}{n+1}$

Otro método:

$P[X<k]=\frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}}$, para $k\in\{n+1,\ldots,N\}$.

$$P[X\geq k]=1-\begin{cases} 1 & \text{si } k\leq n \\ 1-\frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}} & \text{si } k\in\{n+1,\ldots,N\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$E[X] = \sum_{k=1}^{N} P[X \geq k] = n + \sum_{k=n+1}^{N} \left[1 - \frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}}\right]$

$= N - \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N-1} \binom{k}{n} = N - \frac{1}{\binom{N}{n}} \binom{N}{n+1} = \frac{n(N+1)}{n+1}$

Ejercicio 9.8. *Una urna contiene N tarjetas numeradas del 1 al N. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar n tarjetas al azar y con reemplazo. Encuentre el valor esperado del número más grande en la muestra.*

Solución

$P[X < k] = \frac{(k-1)^n}{N^n}$, para $k \in \{1, \ldots, N\}$.

$P[X \geq k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k < 1 \\ 1 - \frac{(k-1)^n}{N^n} & \text{si } k \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$E[X] = \sum_{k=1}^{N} P[X \geq k] = \sum_{k=1}^{N} \left[1 - \frac{(k-1)^n}{N^n}\right]$

$= N - \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N} (k-1)^n = N - \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N-1} k^n$

Otro método:

$P[X = k] = P[X \geq k] - P[X \geq k+1] = \frac{k^n}{N^n} - \frac{(k-1)^n}{N^n}$

$E[X] = \sum_{k=1}^{N} kP[X = k] = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N} \left[k^{n+1} - (k-1)^{n+1} + (k-1)^n\right]$

$= \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N} \left[N^{n+1} + \sum_{k=1}^{N} (k-1)^n\right] = N - \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N-1} k^n$

Ejercicio 9.9. *Sea X una variable aleatoria distribuida geométricamente con parámetro p y sea M un entero positivo. Encuentre la esperanza de $Y = \text{mín}(X, M)$ y $Z = \text{máx}(X, M)$.*

Solución

$P[Y \geq y] = \begin{cases} P[X \geq y] & \text{si } y \in \{0, \ldots, M\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$E(Y) = \sum_{y=1}^{\infty} P[Y \geq y] = \sum_{y=1}^{M} P[X \geq y] = \sum_{y=1}^{M} (1-p)^y = \frac{1-p}{p}\left[1 - (1-p)^M\right]$

$E[Z] = E[M + X - Y] = M + \frac{1-p}{p} - \frac{1-p}{p}\left[1 - (1-p)^M\right] = M + \frac{(1-p)^{M+1}}{p}$

Otro método:

$$P[Y=y]=\begin{cases} P[X=y] & \text{si } y\in\{0,\dots,M-1\} \\ P[X\geq y] & \text{si } y=M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} p(1-p)^y & \text{si } y\in\{0,\dots,M-1\} \\ (1-p)^y & \text{si } y=M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$E[Y]=\sum_{y=1}^{M-1} py(1-p)^y+M(1-p)^M=p(1-p)\sum_{y=1}^{M-1} y(1-p)^{y-1}+M(1-p)^M$

$=-p(1-p)\frac{d}{dp}\sum_{y=1}^{M-1}(1-p)^y+M(1-p)^M=-p(1-p)\frac{d}{dp}\frac{1-p-(1-p)^M}{p}+M(1-p)^M$

$=p(1-p)\left[\frac{1-M(1-p)^{M-1}}{p}+\frac{1-p-(1-p)^M}{p^2}\right]+M(1-p)^M$

$=(1-p)-M(1-p)^M+\frac{1-p}{p}\left[1-p-(1-p)^M\right]+M(1-p)^M=\frac{1-p}{p}\left[1-(1-p)^M\right]$

$$P[Z\geq z]=\begin{cases} 1 & \text{si } z\in\{0,\dots,M\} \\ P[X\geq z] & \text{si } z\in\{M+1,M+2,\dots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$E(Z)=\sum_{z=1}^{\infty} P[Z\geq z]=M+\sum_{z=M+1}^{\infty} P[X\geq z]$

$=M+\sum_{z=M+1}^{\infty}(1-p)^z=M+\frac{(1-p)^{M+1}}{p}$

Ejercicio 9.10. *Se escoge al azar un número del conjunto $\{1,\dots,10\}$. Una persona A trata entonces de determinar el valor del número seleccionado mediante preguntas cuyas únicas respuestas son sí o no. Encuentre la esperanza del número de preguntas que se tienen que hacer hasta encontrar el valor del número en cada uno de los casos siguientes:*

a) La pregunta número i es ¿se seleccionó el número i?

b) Se pregunta de tal manera que la respuesta elimina aproximadamente la mitad de las posibles soluciones.

Solución

a. Sea X el número de preguntas que se realizan, entonces:

$P[X=x]=\frac{1}{10}$, para cualquier $x\in\{1,\dots,10\}$, así que:

$E[X] = \sum_{x=1}^{10} \frac{x}{10} = \frac{11}{2} = 5.5$

b. Después de la primera respuesta el número de posibles soluciones se reduce a 5. Después de la segunda respuesta se reduce a 3 o 2. En caso de que se reduzca a 3, la tercera respuesta podría conducir a la solución, mientras que en caso de que se reduzca a 2, con seguridad la tercera respuesta conduce a la solución. En caso de que se reduzca a 3 y la tercera respuesta no conduzca a la solución, la cuarta respuesta determina la solución. Por lo tanto:

$$P[X = x] = \begin{cases} \frac{6}{10} & \text{si } x = 3 \\ \frac{4}{10} & \text{si } x = 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así que, $E[X] = \frac{18}{10} + \frac{16}{10} = \frac{17}{5} = 3.4$.

Ejercicio 9.11. *Una caja contiene* 5 *componentes eléctricos, de los cuales* 2 *están defectuosos. Se checa cada uno de los componentes en un orden aleatorio hasta que se encuentren los dos defectuosos. ¿Cuál es la esperanza del número de chequeos que se realizan?*

Solución

Sea X el número de chequeos que se realizan. Entonces, para $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, se tiene:

$$P[X = k] = \frac{1}{6-k} \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{k-2}}{\binom{5}{k-1}}$$

Así que:

$$E[X] = \frac{2}{4} \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{5}{1}} + \frac{3}{3} \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{4}{2} \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} + \frac{5}{1} \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{3}}{\binom{5}{4}} = 4$$

Ejercicio 9.12. *Se van colocando al azar bolas, una a una, en cualquiera de N cajas hasta que se ocupe la primera caja. ¿Cuál es el número esperado de bolas que se colocan en las cajas?*

Solución

Sea X el número de bolas que se requieren.

Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$P[X = n] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} \frac{1}{N}$$

Así que, $E[X] = N$.

EJERCICIO 9.13. *Una persona dispone de n llaves, una de las cuales es la única que abre una puerta. La persona va probando cada llave, una a una, hasta encontrar la que abre la puerta. Encuentre el número esperado de intentos que realiza en cada uno de los casos siguientes: a) en cada intento, elige una llave al azar entre las n, b) en cada intento, elige una llave al azar entre las que aún no ha probado.*

Solución

Sea X el número de intentos.

a. $P[X = k] = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}$

$E[X] = n$

b. $P[X = k] = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{1}{n-k+1} = \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$

$E[X] = \sum_{k=1}^{n} kP[X = k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$

EJERCICIO 9.14. *Se realizan sucesivamente ensayos de Bernoulli independientes, en cada uno de los cuales la probabilidad de éxito es p, hasta obtener 2 veces consecutivas éxito o dos veces consecutivas fracaso ¿Cuál es el número esperado de ensayos que se realizan?*

Solución

Sea X el número de ensayos que se realizan.

Se tiene $P[X \geq 1] = P[X \geq 2] = 1$, y, para $k \in \{3, 4, \ldots\}$, el evento $P[X \geq k]$ ocurre si y sólo si en los primeros $k - 1$ ensayos se obtiene éxito y fracaso alternadamente, así que:

$P[X \geq 2n] = p^n(1-p)^{n-1} + p^{n-1}(1-p)^n = p^{n-1}(1-p)^{n-1}$

$P[X \geq 2n+1] = 2p^n(1-p)^n$

Por lo tanto:

$E[X] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} p^n(1-p)^n$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)^{n-1} + 2p(1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)^{n-1}$

$= 1 + [1 + 2p(1-p)]\, \frac{1}{1-p(1-p)} = \frac{2+p(1-p)}{1-p(1-p)}$

Otro método:

$P[X = 2n] = p^{n-1}(1-p)^{n-1}p^2 + (1-p)^{n-1}p^{n-1}(1-p)^2 = [p(1-p)]^{n-1}\left[p^2 + (1-p)^2\right]$

$P[X = 2n+1] = (1-p)^{n-1}p^{n-1}(1-p)p^2 + p^{n-1}(1-p)^{n-1}p(1-p)^2 = [p(1-p)]^n$

$E[X] = [p^2 + (1-p)^2] \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, [p(1-p)]^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\, [p(1-p)]^n$

$= 2\,[p^2 + (1-p)^2] \sum_{n=1}^{\infty} n\, [p(1-p)]^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, [p(1-p)]^n + \sum_{n=1}^{\infty} [p(1-p)]^n$

$= 2\,[p^2 + (1-p)^2 + p(1-p)] \sum_{n=1}^{\infty} n\, [p(1-p)]^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [p(1-p)]^n$

$= 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, [p(1-p)]^{n-1}\, [1 - p(1-p)] + \sum_{n=1}^{\infty} [p(1-p)]^n$

$= 2\frac{1}{1-p(1-p)} + \frac{p(1-p)}{1-p(1-p)} = \frac{2+p(1-p)}{1-p(1-p)}$

Ejercicio 9.15. *Una urna contiene N bolas numeradas del 1 al N. Se van sacando bolas al azar de la urna, una a una y con reemplazo, hasta obtener dos veces consecutivas la misma bola. ¿Cuál es el número esperado de elecciones que se realizan?*

Solución

Sea X el número de elecciones que se realizan.

$P[X = n] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-2} \frac{1}{N}$

$E[X] = \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-2} \frac{1}{N} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2) \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n} \frac{1}{N}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n} \frac{1}{N} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n} \frac{1}{N} = N - 1 + 2 = N + 1$

Otro método:

También se puede decir que se tiene una sucesión de ensayos de Bernoulli en cada uno de los cuales hay éxito si se obtiene el mismo resultado que en el anterior (es decir, $p = \frac{1}{N}$) y se trata entonces de determinar el número de elecciones que se requieren hasta obtener éxito después de la primera elección. Por lo tanto, $E[X] = 1 + N$.

Ejercicio 9.16. *Se quiere seleccionar a una persona de entre n. Para ello, cada una lanza una moneda y se conviene en que si alguna obtiene un resultado distinto al de las otras, entonces esa persona es la seleccionada; de otra manera se vuelven a* *lanzar las monedas bajo las mismas condiciones. Encuentre la esperanza del número de intentos que se realizan hasta que la persona sea seleccionada.*

Solución

Llamando éxito a la obtención de cara al lanzar una moneda, cada lanzamiento de las n monedas representa la realización de n ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito igual a $\frac{1}{2}$. La persona es seleccionada en un lanzamiento únicamente si se obtiene exactamente un éxito o bien exactamente un fracaso, así que la probabilidad de que esto ocurra está dada por $2n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Los diferentes intentos de seleccionar a la persona constituyen una sucesión de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, de manera que si llamamos p_k a la probabilidad buscada, se tiene:

$p_k = \left[1 - 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^{k-1} 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left[1 - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]^{k-1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$E[X] = \frac{1}{2n\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{n}2^{n-1}$

Ejercicio 9.17. *Una pareja de recién casados planea tener tantos hijos como sea necesario hasta tener una niña. Suponiendo que la probabilidad de que un hijo que procree la pareja sea niña es igual a $\frac{1}{2}$, ¿cuál es el valor esperado del número de hijos que tendrá la pareja?*

Solución

$P[X = k] = \frac{1}{2^{K-1}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^K}$, para $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

$P[X \geq k] = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-1}}$, para $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P[X \geq k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Otro método:

Si X es el número de hijos de la pareja, entonces $Y = X - 1$ tiene distribución geométrica con parámetro $1/2$. Por lo tanto, $E(X) = E(Y) + 1 = \frac{1-1/2}{1/2} + 1 = 2$.

Sea A: el primer hijo de la pareja es una niña.

$P[X = k] = P[X = k \mid A]\, P(A) + P[X = k \mid A^c]\, P(A^c)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{2}P\left[X = k-1\right] & \text{si } k \in \{2,3,\ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si } k \in \{1,2,\ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$P\left[X \geq k\right] = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-1}}$, para $k \in \{1,2,3,\ldots\}$.

$E\left[X\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P\left[X \geq k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Ejercicio 9.18. *Una pareja de recién casados planea tener tantos hijos como sea necesario hasta tener por lo menos una niña y por lo menos un niño, deteniendo la procreación una vez conseguido su objetivo. Suponiendo que la probabilidad de que un hijo que procree la pareja sea niña es igual a la probabilidad de que sea niño, ¿cuál es la esperanza del número de hijos que tendrá la pareja?*

***Sugerencia**: Defina Y como el número de hijos que tiene la pareja y el evento A: el primer hijo de la pareja es una niña. Considere entonces la distribución de Y dado que A ocurre y la distribución de Y dado que A no ocurre.*

Solución

$P\left[Y = k\right] = P\left[Y = k \mid A\right] P(A) + P\left[Y = k \mid A^c\right] P(A^c)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2^{k-1}}\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k-1}}\frac{1}{2} & \text{si } k \in \{2,3,\ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2^{k-1}} & \text{si } k \in \{2,3,\ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así que:

$P\left[Y \geq k\right] = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{\frac{1}{2^{k-1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-2}}$, para $k \in \{2,3,\ldots\}$.

$P\left[Y \geq 1\right] = 1$

Por lo tanto:

$E\left[Y\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P\left[Y \geq k\right] = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-2}} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$

Otro método:

Sea X el número de hijos que tiene la pareja después del primero y antes del último. X tiene entonces distribución geométrica con parámetro $p = 1/2$; por lo tanto: $E\left[X\right] = \frac{p}{1-p} = 1$. Por otra parte, si Y es el número de hijos que tiene la pareja hasta tener por lo menos un niño y una niña, entonces $Y = X+2$; por lo tanto, $E\left[Y\right] = E\left[X\right]+2 = 3$.

Otro método:

$P[Y=k] = 2\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$, para $k \in \{2,3,\ldots\}$.

$E[Y] = \sum_{k=2}^{\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = 4\sum_{k=2}^{\infty} k\frac{1}{2^{k+1}} = 4\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{4}\right] = 4\left[1-\frac{1}{4}\right] = 4\left[\frac{3}{4}\right] = 3$

Otro método:

$P[Y \geq k] = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{\frac{1}{2^{k-1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-2}}$, para $k \in \{2,3,\ldots\}$.

$P[Y \geq 1] = 1$

$E[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} P[Y \geq k] = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-2}} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$

EJERCICIO 9.19. *Cuando una determinada máquina no está bien ajustada, la probabilidad de que produzca un artículo defectuoso es igual a* 0.2*. Cada día la máquina se pone a funcionar y se detiene para su ajuste en el momento en que ya ha producido* 3 *artículos defectuosos. ¿Cuál es el número esperado de artículos que produce una máquina desajustada antes de ser detenida para su ajuste?*

Solución

Si $Y = X-3$, entonces Y tiene distribución binomial negativa con parámetros $p=0.2$ y $r=3$, por lo tanto:

$E(Y) = \frac{(1-p)r}{p} = \frac{(0.8)(3)}{0.2} = 12$

Así que, $E(X) = E(Y)+3 = 15$.

EJERCICIO 9.20. *Un lote contiene* $100,000$ *artículos, de los cuales* $10,000$ *están defectuosos. Se van seleccionando artículos de la población, uno por uno y al azar, hasta obtener* 20 *no defectuosos. Estime el número esperado de artículos que se inspeccionan.*

Solución

$P[X=x] = \binom{x-1}{19}p^{20}(1-p)^{x-20} = \binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$

$E[X] = r + \frac{r(1-p)}{p} = \frac{r}{p} = \frac{20}{.9} = 22.22$

EJERCICIO 9.21 (**Problema de los 3 jugadores**). *Tres jugadores, P, Q y R, juegan partidas por parejas en cada una de las cuales la probabilidad que cada jugador tiene* *de ganar es $\frac{1}{2}$; quien gane una partida juega con el otro jugador hasta que uno de los jugadores gane dos partidas consecutivas, ganando entonces el juego. Encuentre el valor esperado del número de partidas que se juegan hasta que uno de los jugadores gana el juego.*

Solución

El experimento aleatorio $\mathcal{E}$ asociado con este problema puede verse como la realización de una sucesión de ensayos de Bernoulli $B_1, B_2, \ldots$, en donde B_1 es éxito si el jugador P gana la primera partida y, para $i \geq 1$, B_{i+1} es éxito si el jugador que ganó la i-ésima partida gana también la que sigue. Con estas convenciones, el juego se termina en el momento en que por primera vez se obtiene éxito después del primer ensayo.

Sea X el número de partidas que se juegan hasta que uno de los jugadores gana el juego. Entonces, para $k \in \{2, 3, \ldots\}$, se tiene:

$$P[X = k] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$P[X \geq k] = \begin{array}{ll} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-2} & \text{si } k \in \{2, 3, \ldots\} \\ 1 & \text{si } k = 1 \end{array}$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P[X \geq k] = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-2} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} = 1 + 2 = 3$$

Otro método:

$X - 2$ tiene distribución geométrica con parámetro $\frac{1}{2}$, así que $E[X] = 2 + 1 = 3$.

Ejercicio 9.22. *Se tienen dos muebles, cada uno con* 20 *cajones. Se elige un mueble al azar y luego un cajón al azar, de ese mueble, colocando ahí un documento. Una persona, que está buscando el documento, elige uno de los muebles al azar y, en ese mueble, va abriendo los cajones al azar, uno a uno, buscando ahí el documento. Si después de revisar* 10 *cajones aún no se encuentra el documento, ¿qué estrategia hace mínimo el número esperado de cajones que se abrirán hasta encontrar el documento: a) continuar buscándolo en el mismo mueble y, en caso de no encontrarlo ahí, continuar con el otro o b) continuar buscándolo en el otro mueble y, en caso de no encontrarlo ahí, continuar con los diez cajones que restan del primero?*

Solución

Definamos los eventos:

A: En los primeros 10 cajones inspeccionados no se encuentra el documento.

B: La llave se encuentra en el mueble seleccionado.

Entonces:

$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c) = \frac{1}{2}\frac{\binom{19}{10}}{\binom{20}{10}} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$P(B \mid A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

Sea X el número de cajones que se abren hasta encontrar el documento y, para cada $i \in \{1, \ldots, 30, \}$, definamos:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la llave se encuentra en el } i\text{-ésimo intento} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a. $E[X_i] = E[X_i \mid B]\, P(B \mid A) + E[X_i \mid B^c]\, P(B^c \mid A) = \begin{cases} \frac{1}{10}\frac{1}{3} & \text{si } i \in \{1, \ldots, 10\} \\ \frac{1}{20}\frac{2}{3} & \text{si } i \in \{11, \ldots, 30\} \end{cases}$

Así que:

$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{30} iX_i\right] = \frac{1}{10}\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{10} i + \frac{1}{20}\frac{2}{3}\sum_{i=11}^{30} i = \frac{11}{6} + \frac{41}{3} = \frac{31}{2} = 15.5$

b. $E[X_i] = E[X_i \mid B]\, P(B \mid A) + E[X_i \mid B^c]\, P(B^c \mid A) = \begin{cases} \frac{1}{20}\frac{2}{3} & \text{si } i \in \{1, \ldots, 20\} \\ \frac{1}{10}\frac{1}{3} & \text{si } i \in \{21, \ldots, 30\} \end{cases}$

Así que:

$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{30} iX_i\right] = \frac{1}{20}\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{20} i + \frac{1}{10}\frac{1}{3}\sum_{i=21}^{30} i = 7 + \frac{17}{2} = \frac{31}{2} = 15.5$

EJERCICIO 9.23. *Se tienen dos muebles, cada uno con* 20 *cajones. Se elige uno de los muebles de tal manera que la probabilidad de que sea seleccionado el primero es igual a* p*, en donde* $p > \frac{1}{2}$*, en seguida se elige un cajón al azar, de ese mueble, colocando ahí un documento. Una persona, que está buscando el documento, elige el primer mueble y, en ese mueble, va abriendo los cajones al azar, uno a uno, buscando ahí el documento. Si después de revisar* 10 *cajones aún no se encuentre el documento, ¿qué estrategia hace mínimo el número esperado de cajones que se abrirán hasta encontrar el documento: a) continuar buscándolo en el mismo mueble y, en caso de no encontrarlo ahí, continuar con el otro o b) continuar buscándolo en el otro mueble y , en caso de no encontrarlo ahí, continuar con los diez cajones que restan del primero?*

Solución

Definamos los eventos:

A: En los primeros 10 cajones inspeccionados no se encuentra el documento.

B: La llave se encuentra en el mueble seleccionado.

Entonces:

$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c) = p\frac{\binom{19}{10}}{\binom{20}{10}} + (1-p) = 1 - \frac{1}{2}p$

$P(B \mid A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}p}{1-\frac{1}{2}p} = \frac{p}{2-p}$

Sea X el número de cajones que se abren hasta encontrar el documento y, para cada $i \in \{1, \ldots, 30, \}$, definamos:

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la llave se encuentre en el } i\text{-ésimo intento} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

a. $E[X_i] = E[X_i \mid B]\, P(B \mid A) + E[X_i \mid B^c]\, P(B^c \mid A) = \begin{cases} \frac{1}{10}\frac{p}{2-p} & \text{si } i \in \{1, \ldots, 10\} \\ \frac{1}{10}\frac{1-p}{2-p} & \text{si } i \in \{11, \ldots, 30\} \end{cases}$

Así que:

$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{30} iX_i\right] = \frac{1}{10}\frac{p}{2-p}\sum_{i=1}^{10} i + \frac{1}{10}\frac{1-p}{2-p}\sum_{i=11}^{30} i$

$= \frac{11}{2}\frac{p}{2-p} + 41\frac{1-p}{2-p} = \frac{1}{2}\frac{82-71p}{2-p}$

b. $E[X_i] = E[X_i \mid B]\, P(B \mid A) + E[X_i \mid B^c]\, P(B^c \mid A) = \begin{cases} \frac{1}{10}\frac{1-p}{2-p} & \text{si } i \in \{1, \ldots, 20\} \\ \frac{1}{10}\frac{p}{2-p} & \text{si } i \in \{21, \ldots, 30\} \end{cases}$

Así que:

$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{30} iX_i\right] = \frac{1}{10}\frac{1-p}{2-p}\sum_{i=1}^{20} i + \frac{1}{10}\frac{p}{2-p}\sum_{i=21}^{30} i$

$= 21\frac{1-p}{2-p} + \frac{51}{2}\frac{p}{2-p} = \frac{3}{2}\frac{14+3p}{2-p}$

$\frac{1}{2}\frac{82-71p}{2-p} - \frac{3}{2}\frac{14+3p}{2-p} = 20\frac{1-2p}{2-p} > 0$

Por lo tanto, la mejor estrategia es la señalada en b.

Ejercicio 9.24. *El tiempo de vida, en días, de cierto componente tiene distribución exponencial con parámetro* $\lambda = 0.1$*. Un usuario adquiere el componente bajo la condición de que pagará* 20 *pesos por cada día de operación (o bien la parte proporcional en caso de no completarse un día) después de la primera semana de uso. a) ¿Cuál* *es la probabilidad de que el productor reciba más de* 100 *pesos por un componente? b) ¿Cuál es la esperanza de lo que recibe el productor por un componente?*

Solución

Sea T el tiempo de vida del componente y X lo que recibe el productor.

Se tiene $X = 20(T-7)I_{[T>7]}$, así que:

$P[X > 100] = P\left[20(T-7)I_{[T>7]} > 100\right] = P[T > 12]$

$= \int_{12}^{\infty} 0.1e^{-0.1t}dt = e^{-1.2} = 0.3012$

$E[X] = E\left[20(T-7)I_{[T>7]}\right] = \int_{7}^{\infty} 2(t-7)e^{-\frac{1}{10}t}dt = 200e^{-\frac{7}{10}} = 99.32$

Ejercicio 9.25. *El tiempo, en horas, que le toma a un técnico reparar una máquina tiene distribución exponencial. Si en promedio ese técnico repara* 2 *máquinas cada hora, ¿cuál es la probabilidad de que pueda reparar* 3 *máquinas en menos de* 2 *horas?*

Solución

Sea X el tiempo que le toma al técnico reparar 3 máquinas. X tiene entonces distribución gama con parámetros $\lambda = 2$ y $\alpha = 3$; por lo tanto:

$P[X < 2] = \int_{0}^{2} 4x^2e^{-2x}dx = 0.761897$

Ejercicio 9.26. *Cada foco producido en una cierta fábrica tiene un tiempo aleatorio de vida T, con función de densidad dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 te^{-\lambda t} & \textit{si } t > 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Se sabe además que, en promedio, el tiempo de vida de cada foco es de 2000 *horas. Estime la probabilidad de que entre* 1000 *focos, seleccionados al azar de la producción de esa fábrica, haya más de* 210 *con un tiempo de vida superior a* 3000 *horas.*

Solución

Sea X el número de focos, entre los 1000, con un tiempo de vida superior a 3000 horas. X tiene entonces distribución binomial con parámetros $n = 1000$ y $p = P[T > 3000]$.

Además, $E[T] = \int_{0}^{\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}dt = \frac{2}{\lambda} = 2000$, así que, $\lambda = \frac{1}{1000}$.

Por lo tanto: $p = P[T > 3000] = \int_{3000}^{\infty} \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = 3e^{-3} + e^{-3} = 0.19915$

Finalmente, utilizando el teorema de de Moivre Laplace, se tiene:

$$P[X > 210] = P[X \geq 210.5] = P\left[\frac{X-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}} \geq \frac{210.5-199.15}{\sqrt{159.49}}\right]$$

$$= P\left[\frac{X-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}} \geq 0.89873\right] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0.89873}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 0.1844$$

Ejercicio 9.27. *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Encuentre la esperanza de $(1+X)^{-1}$.*

Solución

$$E\left[(1+X)^{-1}\right] = \sum_{k=0}^{n} (1+k)^{-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}$$

$$= \frac{1}{(n+1)p} \left(1 - (1-p)^{n+1}\right)$$

Ejercicio 9.28. *Sea F la función de distribución de una variable aleatoria con distribución normal estándar y sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = \sqrt{2}$. Exprese $E(e^{-X^2})$ en términos de F y encuentre su valor.*

Solución

$$E\left[e^{-X^2}\right] = \lambda \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-\lambda x} dx = \lambda e^{\lambda^2/4} \int_0^{\infty} e^{-(x+\frac{\lambda}{2})^2} dx$$

$$= \frac{\lambda e^{\lambda^2/4}}{\sqrt{2}} \int_{\lambda/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi e} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi e}\left[1 - F(1)\right]$$

$$= \sqrt{2\pi e}(0.158655) = 0.65568$$

Ejercicio 9.29. *Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. Encuentre $E\left[e^{3X-X^2}\right]$.*

Solución

$$E\left[e^{3X-X^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{3x-x^2} e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{2}(x-1)^2} dx$$

$= \frac{e^{3/2}}{\sqrt{6\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{e^{3/2}}{\sqrt{3}}$

Ejercicio 9.30. *La demanda de un cierto producto, que se vende según su peso, está dada por una variable aleatoria continua X con función de distribución F_X (no necesariamente absolutamente continua). La venta de x kilos del producto produce una ganancia de ax pesos mientras que x kilos no vendidos producen una pérdida de bx pesos, en donde x es cualquier número real no negativo. Demuestre que el valor esperado de la ganancia se maximiza comprando, para su venta, x_0 kilos del producto, en donde x_0 es tal que $F_X(x_0) = \frac{a}{a+b}$.*

Solución

Sea x el número de kilos que se compran para su venta y $G(x)$ la ganancia que se obtiene al ofrecerlos en venta.

$$G(x) = \begin{cases} aX - b(x - X) & \text{si } X < x \\ ax & \text{si } X \geq x \end{cases} = \begin{cases} (a+b)X - bx & \text{si } X < x \\ ax & \text{si } X \geq x \end{cases}$$

$$F_{G(x)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -bx \\ F_X\left(\frac{bx+y}{a+b}\right) & \text{si } -bx \leq y < ax \\ 1 & \text{si } y \geq ax \end{cases}$$

$$E\left[G(x)\right] = \int_0^{ax} \left[1 - F_X\left(\frac{bx+y}{a+b}\right)\right] dy - \int_{-bx}^{0} F_X\left(\frac{bx+y}{a+b}\right) dy$$

$$= ax - \int_{-bx}^{ax} F_X\left(\frac{bx+y}{a+b}\right) dy = ax - (a+b) \int_0^{x} F_X(z) dz$$

Así que $E\left[G(x)\right]$ es máxima cuando $a-(a+b)F_X(x) = 0$, es decir cuando $F_X(x) = \frac{a}{a+b}$.

Ejercicio 9.31. *Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar, $y \in \mathbb{R}$ y definamos la variable aleatoria X mediante la siguiente relación:*

$$X = \begin{cases} Z & \textit{si } Z > y \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $E\left[X\right]$.

Solución

$X = ZI_{[Z>y]}$

$$E\left[X\right] = \int_y^{\infty} z f_Z(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

COMPLEMENTO

$F_X(x) = P[X \leq x] = P[Z \leq x, Z > y] + P[x \geq 0, Z \leq y]$

$= P[y < Z \leq x] + P[x \geq 0, Z \leq y]$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y < 0 \\ P[y < Z \leq x] & \text{si } y < x < 0 \\ P[Z \leq x] & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y < 0 \\ F_Z(x) - F_Z(y) & \text{si } y < x < 0 \\ F_Z(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Así que:

$$f_X(x) = \begin{cases} f_Z(x) & \text{si } x > y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 9.32. *Un experimento aleatorio consiste en lanzar 10 dados. Sea X la suma de los números que se obtienen. Encuentre $E[X]$.*

Solución

$E[X] = 10\left(\frac{7}{2}\right) = 35$

Ejercicio 9.33. *Cada persona de un grupo de N lanza su sombrero al aire de tal manera que cada persona recoge uno de ellos al azar. ¿Cuál es la esperanza del número de personas que obtienen el sombrero que llevaban originalmente?*

Solución

Sea X el número de personas que obtienen el sombrero que llevaban originalmente y, para $i \in \{1, \ldots, N\}$, sea X_i una variable aleatoria que toma el valor 1 si la persona i obtiene el sobrero que llevaba originalmente y el valor 0 en otro caso. Entonces:

$E[X_i] = P[X_i = 1] = \frac{1}{N}$

$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} E[X_i] = 1$

Ejercicio 9.34. *Una caja contiene n lámparas, de las cuales r funcionan correctamente. Se checa cada una de las lámparas en un orden aleatorio hasta que se encuentre una que funcione correctamente. ¿Cuál es la esperanza del número de chequeos que se realizan?*

Solución

Sea X el número de chequeos que se realizan y, para $i \in \{1, \ldots, n-r\}$, sea X_i una variable aleatoria que toma el valor 1 si la i-ésima lámpara que no funciona correctamente se selecciona antes que cualquiera de las que sí funcionan correctamente y 0 en otro caso . Entonces se tiene:

$E[X_i] = P[X_i = 1] = \frac{1}{r+1}$

$E[X] = E\left[1 + \sum_{i=1}^{n-r} X_i\right] = 1 + \sum_{i=1}^{n-r} E[X_i] = 1 + \frac{n-r}{r+1} = \frac{n+1}{r+1}$

Ejercicio 9.35. *Una caja contiene n componentes eléctricos, de los cuales r están defectuosos. Se checa cada uno de los componentes en un orden aleatorio hasta que se encuentran s defectuosos. ¿Cuál es la esperanza del número de chequeos que se realizan?*

Solución

Sea X el número de chequeos que se realizan y, para $i \in \{1, \ldots, n-r\}$ sea X_i una variable aleatoria que toma el valor 1 si la i-ésima lámpara que no está defectuosa se selecciona antes de que se hayan seleccionado s de las que sí lo están y 0 en otro caso. Entonces se tiene:

$E[X_i] = P[X_i = 1] = \frac{s}{r+1}$

$E[X] = E\left[s + \sum_{i=1}^{n-r} X_i\right] = s + \sum_{i=1}^{n-r} E[X_i] = s + \frac{(n-r)s}{r+1} = \frac{s(n+1)}{r+1}$

Ejercicio 9.36. *Para determinar si alguna persona tiene una cierta enfermedad es necesario realizarle un análisis de sangre. Se quiere examinar a $N = n * m$ personas y, para reducir el número de pruebas, se decide formar grupos de m personas cada uno. Las muestras de sangre de las m personas en cada grupo se mezclan y se analiza la mezcla. Si la prueba resulta negativa, se concluye que ninguna persona en el grupo tiene la enfermedad y no es necesario realizar ningún otro análisis a las personas de ese grupo, pero si resulta positiva, se realiza el examen a cada una de las personas del grupo. Suponiendo que cada una de las N personas tiene la enfermedad con probabilidad $p = 0.01$, encuentre la esperanza del número de análisis que se realizan, siguiendo el método descrito, para determinar si cada una de las N personas tiene la enfermedad.*

Solución

Sea X el número de análisis que se realizan con las N personas y, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, sea X_k el número de análisis que se realizan con las personas del grupo número k. Se tiene entonces:

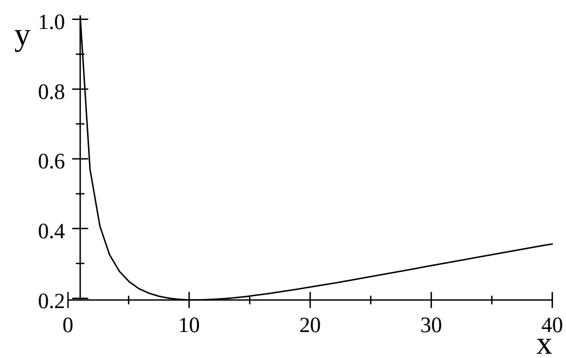
$$P\left[X_k = x\right] = \begin{cases} (1-p)^m & \text{si } x = 1 \\ 1-(1-p)^m & \text{si } x = m+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así que: $E\left[X_k\right] = (1-p)^m + (m+1)\left[1-(1-p)^m\right] = m+1-m\,(1-p)^m$

Además, $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$, así que:

$E\left[X\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\right] = n\left[m+1-m\,(1-p)^m\right] = N\left[1+\frac{1}{m}-(1-p)^m\right]$

Obsérvese que la función $f(m) = 1+\frac{1}{m}-(.99)^m$ tiene un mínimo en $m = 10.516$ (entero: $m = 11$).



Ejercicio 9.37. *Supongamos que elegir una persona al azar y anotar el día de su cumpleaños es equivalente a elegir al azar un día de entre los 365 del año. Encuentre el número esperado de días de nacimiento distintos en un grupo de N personas elegidas al azar.*

Solución

Sea X el número de días de nacimiento distintos en el grupo de N personas y, para $j \in \{1, \ldots, 365\}$, definamos:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si hay por lo menos un nacimiento en el día } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$E[X_j] = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^N$

$E[X] = \sum_{j=1}^{365} E[X_j] = 365\left[1 - \left(\frac{364}{365}\right)^N\right]$

EJERCICIO 9.38 (**Problema del colector de cupones**). *Una urna contiene N bolas numeradas del 1 al N. Se van sacando bolas de la urna, una a una y con reemplazo, hasta que se ha seleccionado por lo menos una bola de cada número. Encuentre el tamaño esperado de la muestra que se obtiene.*

Solución

Sea X el tamaño de la muestra que se obtiene y, para $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, definamos X_j como el número de elecciones que se realizan a partir del momento en que ya se han seleccionado j bolas distintas hasta obtener una bola distinta a las j distintas que se han obtenido previamente.

$P[X_j = k] = \left(\frac{j}{N}\right)^{k-1} \frac{N-j}{N}$

Así que:

$E[X_j] = \frac{N}{N-j}$

$E[X] = \sum_{j=0}^{N-1} E[X_j] = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{N}{N-j} = N\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \cdots + \frac{1}{1}\right) = N\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right)$

EJERCICIO 9.39. *Sea X una variable aleatoria cualquiera. demuestre que a) si $F_X(m) = \frac{1}{2}$ entonces m es mediana de X, b) Si X es una variable aleatoria continua, entonces m es mediana de X si y sólo si $F_X(m) = \frac{1}{2}$, c) si no existe algún punto $x \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(x) = \frac{1}{2}$ entonces $m = \text{ínf}\left\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \frac{1}{2}\right\} = \sup\left\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < \frac{1}{2}\right\}$ es la única mediana de X y d) si existe algún punto $x \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(x) = \frac{1}{2}$ entonces un número real m es mediana de X si y sólo si $m \in [a, b]$, en donde $a = \text{ínf}\left\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = \frac{1}{2}\right\}$ y $b = \sup\left\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = \frac{1}{2}\right\}$.*

Solución

a. $P[X \leq m] = F_X(m) = \frac{1}{2}$

$P[X \geq m] \geq P[X > m] = 1 - F_X(m) = \frac{1}{2}$

b. Supongamos $P[X \leq m] \geq \frac{1}{2}$ y $P[X \geq m] \geq \frac{1}{2}$, entonces:

$F_X(m) = P[X \leq m] \geq \frac{1}{2}$

$1 - F_X(m) = P[X > m] = P[X \geq m] \geq \frac{1}{2}$

Así que $F_X(m) = \frac{1}{2}$.

c) Como F_X es continua por la derecha, $P[X \leq m] = F_X(m) > \frac{1}{2}$.

Si $y < m$ entonces $P[X \leq y] < \frac{1}{2}$, así que $P[X < m] < \frac{1}{2}$, de lo cual se sigue $P[X \geq m] > \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, m es mediana de X.

Si $y < m$ entonces $P[X \leq y] < \frac{1}{2}$, así que y no puede ser mediana de X.

Si $y > m$ entonces $P[X < y] \geq P[X \leq m] > \frac{1}{2}$, así que $P[X \geq y] < \frac{1}{2}$, por lo que y no puede ser mediana de X.

d. Si $y < a$, entonces $F_X(y) < \frac{1}{2}$, así que y no puede ser mediana de X.

Si $y > b$, sea $y > z > b$, entonces, $P[X < y] \geq P[X \leq z] = F_X(z) > \frac{1}{2}$, así que $P[X \geq y] < \frac{1}{2}$, por lo que y no puede ser mediana de X.

Como F_X es continua por la derecha, $P[X \leq a] = F_X(a) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, a es mediana de X.

Si $F_X(b) = \frac{1}{2}$ entonces b es mediana de X.

En otro caso, como $b = \sup\left\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = \frac{1}{2}\right\}$, existe una sucesión creciente de números reales x_n cuyo límite es b y tales que $F_X(x_n) = \frac{1}{2}$, así que $P[X < b] = \frac{1}{2}$, de lo cual se sigue $P[X \leq b] \geq \frac{1}{2}$ y $P[X \geq b] = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, en cualquier caso, b es mediana de X.

Si $a < y < b$, entonces $F_X(y) = \frac{1}{2}$, así que y es mediana de X.

Ejercicio 9.40. *Encuentre una mediana de X si su distribución es a) uniforme en el intervalo (a, b), b) normal con parámetros μ y σ^2 y c) exponencial con parámetro λ.*

Solución

a. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (a, b), entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Así que $F(m) = \frac{1}{2}$ únicamente cuando $\frac{m-a}{b-a} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, X tiene una única mediana, la cual está dada por $m = a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(a+b)$.

b. Sea X una variable aleatoria con distribución normal de parámetros μ y σ^2, entonces, como la función de densidad de X es simétrica con respecto a $x = \mu$, $F(m) = \frac{1}{2}$ únicamente cuando $m = \mu$. Por lo tanto, la única mediana de X es $m = \mu$.

c. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ, entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Así que $F(m) = \frac{1}{2}$ únicamente cuando $1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la única mediana de X es $m = \frac{1}{\lambda} \ln 2$.

Ejercicio 9.41. *Sea X una variable aleatoria de esperanza finita. Demuestre que $m \in \mathbb{R}$ es mediana de X si y sólo si la función $G(x) = E\left[|X - x|\right]$ alcanza su valor mínimo en $x = m$.*

Solución

Supongamos que m es mediana de X.

Se tiene $P\left[X < m\right] \leq \frac{1}{2}$, así que $F_X(z) \leq \frac{1}{2}$ cuando $z < m$.

Además, $F_X(m) \geq \frac{1}{2}$, así que $F_X(z) \geq \frac{1}{2}$ cuando $z > m$.

Por lo tanto, para cualquier $y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$G(y) - G(m) = 2\int_m^y F_X(z)dz + m - y \geq (y - m) + (m - y) = 0.$

Además, si y no es mediana de X y $y < m$, entonces $F_X(y) < \frac{1}{2}$, de manera que, como F_X es continua por la derecha, existen $c < \frac{1}{2}$ y $\delta > 0$ tales que $F_X(z) \leq c$ para cualquier $z \in [y, y + \delta)$. Por lo tanto: $G(y) - G(m) = 2\int_m^y F_X(z)dz + m - y > 0$. Por otra parte, si y no es mediana de X y $y > m$, entonces $P\left[X < y\right] > \frac{1}{2}$, de manera que, como la función $y \mapsto P\left[X < y\right]$ es continua por la izquierda, existen $c > \frac{1}{2}$ y $\delta > 0$ tales que $P\left[X < z\right] \geq c$ para cualquier $z \in (y - \delta, y]$. Por lo tanto: $G(y) - G(m) = 2\int_m^y F_X(z)dz + m - y > 0$

EJERCICIO 9.42. *Se desea construir una estación de bomberos en algún punto de un camino de longitud infinita. Supongamos que el punto sobre el camino en el cual se presenta un incendio es aleatorio, de tal manera que la distancia, X, desde el origen hasta dicho punto, es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. ¿En dónde deberá construirse la estación de tal manera que la esperanza de la distancia de la estación a un incendio sobre el camino sea mínima?*

Solución

Se quiere encontrar $a > 0$ tal que $E\left[|X - a|\right]$ sea un mínimo.

$E\left[|X - a|\right] = \int_0^\infty |x - a| \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^a (a - x)\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_a^\infty (x - a)\lambda e^{-\lambda x} dx$

$= \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda a} + \lambda a - 1) + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} = \frac{1}{\lambda}(2e^{-\lambda a} + \lambda a - 1)$

Derivando esta expresión con respecto a a e igualando a cero se obtiene $a = \frac{1}{\lambda} \ln 2$.

EJERCICIO 9.43. *Sea X una variable aleatoria distribuida uniformemente en $\{0, \ldots, N\}$. Encuentre la esperanza y la varianza de X.*

Solución

$E(X) = \sum_{k=0}^N kP\left[X = k\right] = \sum_{k=0}^N k \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N k = \frac{1}{N+1} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{1}{2}N$

$E(X^2) = \sum_{k=0}^N k^2 P\left[X = k\right] = \sum_{k=0}^N k^2 \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N k^2$

$= \frac{1}{N+1} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{1}{6}N(2N + 1)$

$Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = \frac{N(2N+1)}{6} - \frac{N^2}{4} = \frac{1}{12}N^2 + \frac{1}{6}N = \frac{N(N+2)}{12}$

EJERCICIO 9.44. *Sean $a < b$ dos números reales y X una variable aleatoria distribuida uniformemente en el conjunto $\left\{x_k = a + \frac{k}{n}(b - a) \mid k \in \{1, \ldots, n\}\right\}$. Encuentre la esperanza y la varianza de X.*

Solución

Si Y es una variable aleatoria distribuída uniformemente en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$, entonces $X = a + \frac{Y}{n}(b - a)$, por lo tanto:

$E(X) = a + \frac{b-a}{n} E(Y) = a + \frac{b-a}{n} \frac{n+1}{2} = a + \frac{n+1}{2n}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2n}(b - a)$

$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{n^2} Var(Y) = \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n^2-1}{12} = \frac{n^2-1}{12n^2}(b - a)^2 = \frac{1}{12}(b - a)^2 - \frac{1}{12n^2}(b - a)^2$

Ejercicio 9.45. *Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(-2,1)$. Encuentre la esperanza y la varianza de $Y = |X+1|$.*

Solución

$E\left[|X+1|\right] = \int_{-2}^{1} \frac{1}{3} |x+1|\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x+1)dx - \frac{1}{3}\int_{-2}^{-1}(x+1)dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$E\left[|X+1|^2\right] = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1}(x+1)^2 dx = 1$

$Var\ \left[|X+1|\right] = E\left[|X+1|^2\right] - \left(E\left[|X+1|\right]\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

Ejercicio 9.46. *Si Y es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(-3,2)$. Encuentre la esperanza y la varianza de $Y = |X^2 - 1|$.*

Solución

$E\left[Y\right] = \frac{1}{5}\int_{-3}^{2} |x^2-1|\, dx = \frac{1}{5}\int_{-3}^{-1}(x^2-1)dx + \frac{1}{5}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \frac{1}{5}\int_{1}^{2}(x^2-1)dx = \frac{28}{15}$

$E\left[Y^2\right] = \frac{1}{5}\int_{-3}^{2}(x^2-1)^2 dx = \frac{22}{3} Var(Y) = \frac{22}{3} - \left(\frac{28}{15}\right)^2 = \frac{866}{225}$

Ejercicio 9.47. *Se toma una muestra con reemplazo de tamaño 4 de una urna que contiene 30 bolas numeradas del 1 al 30. Sea X la suma de los números que se obtienen. Encuentre la varianza de X.*

Solución

Sea X_i el número que se obtiene en la i-ésima elección.

$E\left[X_i\right] = \frac{1}{30}\sum_{k=1}^{30} k = \frac{1}{30}\frac{(30)(31)}{2} = \frac{31}{2}$

$E\left[X_i^2\right] = \frac{1}{30}\sum_{k=1}^{30} k^2 = \frac{1}{30}\frac{(30)(31)(61)}{6} = \frac{(31)(61)}{6} = \frac{1891}{6}$

$Var(X_i) = \frac{1891}{6} - \left(\frac{31}{2}\right)^2 = \frac{899}{12}$

$Var(X) = 4Var(X_i) = \frac{899}{3} = 299.67$

Ejercicio 9.48. *Supongamos que X y Y son dos variables aleatorias independientes tales que $E(X^4) = 2,\ \ E(Y^2) = 1,\ \ E(X^2) = 1\ \ y\ E(Y) = 0$. Encuentre $Var(X^2Y)$.*

Solución

$Var(X^2Y) = E\left[(X^2Y)^2\right] - \left[(E\left(X^2Y\right))^2\right] = E(X^4)E(Y^2) - \left[(E(X^2)E(Y))^2\right]$

$= (2)(1) - \left[((1)(0))^2\right] = 2$

Ejercicio 9.49. *Sean X y Y dos variables aleatorias independientes de varianza finita. Encuentre la varianza de $2X + 3Y$ en términos de las varianzas de X y Y.*

Solución

$Var(2X + 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) = 4Var(X) + 9Var(Y)$

Ejercicio 9.50. *En un grupo de 20 personas, de las cuales 10 son hombres y 10 son mujeres, se forman 10 parejas al azar. Encuentre la esperanza y la varianza del número de parejas integradas por un hombre y una mujer entre las 10 que se forman al azar.*

Solución

Sea X el número de parejas integradas por un hombre y una mujer entre las 10 que se forman al azar y, para cada $k \in \{1, \ldots, 10\}$, sea X_k una variable aleatoria que toma el valor 1 cuando la pareja número k queda integrada por un hombre y una mujer y el valor 0 en otro caso. Entonces, como la probabilidad de que la pareja número k quede integrada por un hombre y una mujer está dada por $\frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}}$, se tiene:

$E\left[X_k\right] = \frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{10}{19}$

$E\left[X_k^2\right] = E\left[X_k\right] = \frac{10}{19}$

$Var(X_k) = E\left[X_k^2\right] - \left(E\left[X_k\right]\right)^2 = \frac{10}{19} - \left(\frac{10}{19}\right)^2 = \frac{90}{(19)^2}$

Por otra parte, para $i, j \in \{1, \ldots, 10\}$, con $i \neq j$, la variable aleatoria X_iX_j toma el valor 1 cuando tanto la pareja número i como la número j quedan integradas por un hombre y una mujer y el valor 0 en otro caso. Además, la probabilidad de que tanto la pareja número i como la número j queden integradas por un hombre y una mujer está dada por $\frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}}\frac{\binom{9}{1}\binom{9}{1}}{\binom{18}{2}}$. Por lo tanto, se tiene:

$E[X_iX_j] = \frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}} \frac{\binom{9}{1}\binom{9}{1}}{\binom{18}{2}} = \frac{10}{19}\frac{9}{17}$

$Cov(X_i, X_j) = E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = \frac{10}{19}\frac{9}{17} - \left(\frac{10}{19}\right)^2 = \frac{10}{(17)(19)^2}$

Finalmente, $X = \sum_{k=1}^{10} X_k$, así que:

$E[X] = \sum_{k=1}^{10} E[X_k] = \frac{100}{19} = 5.2632$

$Var(X) = Var(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + 2\sum_{\{i,j\in\{1,2,\dots,10\},\ i<j\}} Cov(X_i, X_j)$

$= \frac{900}{(19)^2} + 2\binom{10}{2}\frac{10}{(17)(19)^2} = \frac{(900)(18)}{(17)(19)^2} = 2.6397$

Ejercicio 9.51. *Sea X una variable aleatoria con distribución hipergeométrica de parámetros r, s y n. Encuentre la varianza de X.*

Solución

Recordemos que esta distribución se presenta al tomar una muestra sin reemplazo de tamaño $n \leq r + s$ de una población formada por dos tipos de elementos, I y II, de tal manera que hay r elementos de tipo I y s de tipo II y definiendo X como el número de elementos de tipo I que se obtienen en la muestra. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definamos la variable aleatoria X_i de la siguiente manera:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo elemento de la muestra es de tipo I} \\ 0 & \text{si el } i\text{-ésimo elemento de la muestra es de tipo II} \end{cases}$$

Entonces $E[X_i] = \frac{r}{r+s}$ y como $X = X_1 + \cdots + X_n$, se tiene $E[X] = \frac{nr}{r+s}$.

$E[X_i^2] = E[X_i] = \frac{r}{r+s}$

$Var(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{r}{r+s} - \left(\frac{r}{r+s}\right)^2 = \frac{r}{r+s}\left(1 - \frac{r}{r+s}\right) = \frac{rs}{(r+s)^2}$

$E[X_iX_j] = \frac{r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)}$

$Cov(X_i, X_j) = E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = \frac{r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)} - \left(\frac{r}{r+s}\right)^2 = \frac{r}{r+s}\left(\frac{r-1}{r+s-1} - \frac{r}{r+s}\right)$

$= -\frac{rs}{(r+s)^2(r+s-1)}$

Así que:

$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{\{i,j\in\{1,2,\dots,n\},\ i<j\}} Cov(X_i, X_j)$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{rs}{(r+s)^2} - 2 \sum_{\{i,j \in \{1,2,\ldots,n\},\ i<j\}} \frac{rs}{(r+s)^2(r+s-1)} = \frac{ns}{(r+s)^2} - 2\binom{n}{2} \frac{rs}{(r+s)^2(r+s-1)}$

$= \frac{nrs}{(r+s)^2} - \frac{n(n-1)rs}{(r+s)^2(r+s-1)} = \frac{nrs(r+s-1)-n(n-1)rs}{(r+s)^2(r+s-1)} = \frac{nrs(r+s-n)}{(r+s)^2(r+s-1)}$

Ejercicio 9.52. *Sea X una variable aleatoria con distribución gama de parámetros α y λ. Encuentre $E[X^n]$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

Solución

$E[X^n] = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^n x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^n \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+n-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^n \Gamma(\alpha)}$

Ejercicio 9.53. *Sea X una variable aleatoria y $n \in \mathbb{N}$. Si X tiene esperanza finita y $|X - E(X)|^n$ también tiene esperanza finita, se dice que X tiene momento central de orden n finito y a la cantidad $E[(X - E(X))^n]$ se le llama el momento central de orden n de X. a) Demuestre que una variable aleatoria X tiene momento central de orden n finito si y sólo si X tiene momento de orden n finito. b) Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, encuentre el momento central de orden n de una variable aleatoria con distribución normal de parámetros μ y σ^2.*

Solución

a) Para cualquier $r \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene $|x|^{r-1} \leq 1 + |x|^r$, así que:

$E\left[|X - E(X)|^{r-1}\right] \leq 1 + E\left[|X - E(X)|^r\right]$

Por lo tanto, Si una variable aleatoria X tiene momento central de orden n finito, entonces, para cualquier entero no negativo $m \leq n$, X tiene momento central de orden m finito.

$E\left[|X - E(X)|^n\right] \leq E\left[(|X| + |E(X)|)^n\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (|E(X)|)^{n-k} E\left[|X|^k\right]$

Así que si X tiene momento de orden n finito entonces también tiene momento central de orden n finito.

$E\left[|X|^n\right] \leq E\left[(|X - E(X)| + |E(X)|)^n\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (|E(X)|)^{n-k} E\left[|X - E(X)|^k\right]$

Así que si X tiene momento central de orden n finito entonces también tiene momento de orden n finito.

b) $\frac{X-\mu}{\sigma}$ tiene distribución normal estándar, así que:

$$E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^n\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$E\left[(X-\mu)^n\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)\sigma^n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejercicio 9.54. *Sea X una variable aleatoria con una función de densidad tipo Poisson de parámetro λ. Utilice la desigualdad de Chebyshev para verificar las siguientes desigualdades:*

a) $P(X \leq \frac{\lambda}{2}) \leq \frac{4}{\lambda}$

b) $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$

Solución

$P\left[|X - E\left[X\right]| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} Var\left[X\right]$

Se tiene $E\left[X\right] = \lambda$ y $Var(X) = \lambda$, así que, por la desigualdad de Chebyshev, para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene:

$P\left[|X - \lambda| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\lambda}{\varepsilon^2}$

a. $P(X \leq \frac{\lambda}{2}) = P(X - \lambda \leq -\frac{\lambda}{2}) \leq P\left[|X - \lambda| \geq \frac{\lambda}{2}\right] \leq \frac{4}{\lambda}$

b. $P(X \geq 2\lambda) = P(X - \lambda \geq \lambda) \leq P\left[|X - \lambda| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda}$

Ejercicio 9.55. *Supongamos que para decidir si una moneda está balanceada la lanzamos $1,000$ veces y rechazamos la moneda como balanceada si el número de soles o el número de águilas que se obtienen es mayor o igual a 550. Utilice la desigualdad de Chebyshev para determinar el máximo porcentaje de monedas balanceadas que se rechazan con este procedimiento. Compare el resultado con el que se obtiene aplicando el teorema de de Moivre Laplace.*

Solución

Si llamamos X al número de soles en los 1000 lanzamientos y suponemos que la moneda está balanceada, la desigualdad de Chebyshev establece:

$P\left[|X - 500| \geq 50\right] \leq \frac{250}{2500} = 0.1$

Así que, a lo más se rechazan 1 de cada 10 monedas balanceadas con este procedimiento.

Por otra parte, el teorema de de Moivre Laplace establece:

$P[|X-500|<50] = P\left[-\frac{50}{\frac{1}{2}\sqrt{1000}} < \frac{X-500}{\frac{1}{2}\sqrt{1000}} < \frac{50}{\frac{1}{2}\sqrt{1000}}\right]$

$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3.162}^{3.162} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 0.9984$

$P[|X-500| \geq 50] \approx 1 - 0.9984 = 0.0016$

Así que, se rechazan, aproximadamente, 16 de cada $10,000$ monedas balanceadas con este procedimiento.

Ejercicio 9.56. *Para estimar la proporción de cierta clase de peces, en una determinada población, se toma una muestra con reemplazo de tamaño* 100 *y la proporción de peces que se obtiene en la muestra se toma como la proporción de peces en la población. Calcule la probabilidad de cometer un error mayor de* 0.05 *con esta estimación.*

Solución

Si p es la proporción de peces en la población y X el número de peces que se obtienen en la muestra, entonces X tiene distribución binomial con parámetros $n=100$ y p.

La desigualdad de Chebyshev establece:

$P\left[\left|\frac{X}{n}-p\right| > 0.05\right] \leq \frac{np(1-p)}{(.05n)^2} \leq 1$

Por otra parte, el teorema de de Moivre Laplace establece:

$P\left[\left|\frac{X}{n}-p\right| \leq 0.05\right] = P\left[-\frac{0.05n}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0.05n}{\sqrt{npq}}\right]$

$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{0.05n}{\sqrt{npq}}}^{\frac{0.05n}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 0.68269$

Así que:

$P\left[\left|\frac{X}{n}-p\right| > 0.05\right] \approx 1 - 0.68269 = 0.31731$

Ejercicio 9.57. *De acuerdo con su experiencia, un profesor sabe que la calificación de un estudiante en su examen final es una variable aleatoria X con esperanza* 75. *a) Obtenga una cota superior para la probabilidad de que la calificación de un estudiante exceda* 85. *Suponga además que el profesor sabe que la varianza de X es igual a*

25. *b) ¿Qué se puede decir acerca de la probabilidad de que un estudiante obtenga una calificación entre* 65 *y* 85*? c) ¿Cuántos estudiantes tendrían que presentar el examen de tal manera que, con una probabilidad de por lo menos* 0.9*, el promedio de calificaciones distará de* 75 *en menos que* 5*?*

Solución

a. $P[X > 85] \leq P[|X| \geq 85] \leq \frac{1}{85}E[|X|] = \frac{75}{85} = \frac{15}{17} = 0.88235$

b. Por la desigualdad de Chebyshev, se tiene:

$P[65 < X < 85] = P[|X - 75| < 10] \geq 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4}$

c. Sea n el número buscado. Por la desigualdad de Chebyshev, se tiene:

$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - 75\right| < 5\right] \geq 1 - \frac{25}{25n} = 1 - \frac{1}{n} \geq 0.9$

Así que, $n \geq 10$.

Ejercicio 9.58. *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n = 30$ y $p = \frac{1}{2}$. a) Encuentre el valor exacto de $P[12 \leq X \leq 18]$. b) Utilice la desigualdad de Chebyshev para estimar $P[12 \leq X \leq 18]$.*

Solución

a. $P[12 \leq X \leq 18] = \sum_{k=12}^{18} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{30} = 0.79951$

b. Por la desigualdad de Chebyshev, se tiene:

$P[12 \leq X \leq 18] = P[|X - 15| \leq 3] \geq 1 - \frac{30}{36} = \frac{1}{6} = 0.16667$

Ejercicio 9.59. *a) Utilice el teorema de de Moivre-Laplace para estimar el más pequeño valor de n con la propiedad de que al lanzar n veces una moneda, la probabilidad de que el porcentaje de las veces en que se obtiene sol esté comprendido entre* 49% *y* 51% *sea mayor o igual a* 0.95*. b) Resuelva el mismo problema utilizando la desigualdad de Chebyshev.*

Solución

Sea X el número de soles que se obtienen al lanzar n veces la moneda. X tiene entonces distribución binomial con parámetros n y $p = \frac{1}{2}$.

Por otra parte, se quiere $P\left[0.49 \leq \frac{X}{n} \leq 0.51\right] \geq 0.95$; es decir:

$P\left[0.49n \leq X \leq 0.51n\right] \geq 0.95$

En otras palabras, se busca n tal que:

$P\left[\left|X - \frac{n}{2}\right| \leq 0.01n\right] \geq 0.95$

a. Por el teorema de de Moivre-Laplace, se tiene:

$P\left[\left|X - \frac{n}{2}\right| \leq 0.01n\right] = P\left[-0.02\sqrt{n} \leq \frac{X - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq 0.02\sqrt{n}\right] \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0.02\sqrt{n}} e^{-x^2/2} dx$

De las tablas de la distribución normal estándar, se tiene:

$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1.96} e^{-x^2/2} dx = 0.95$

Así que, para que n satisfaga la relación deseada, se debe tener $.02\sqrt{n} \geq 1.96$; es decir:

$n \geq (98)^2 = 9,604$

b. Por la desigualdad de Chebyshev, se tiene:

$P\left[\left|X - \frac{n}{2}\right| \leq 0.01n\right] \geq 1 - \frac{\frac{n}{4}}{0.0001n^2} = 1 - \frac{1}{0.0004n}$

Así que, para que n satisfaga la relación deseada, se debe tener $1 - \frac{1}{0.0004n} \geq 0.95$; es decir:

$n \geq \frac{1}{(0.0004)(0.05)} = 50,000$

Ejercicio 9.60. *Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde λ es una constante positiva. Encuentre la función generadora de probabilidades, $\Phi_X(t) = E\left[t^X\right]$, de X.

Solución

$\Phi_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{t^x e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = te^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!} = te^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!}$

$= te^{-\lambda} e^{\lambda t} = te^{\lambda(t-1)}$

EJERCICIO 9.61. *Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & si\ x \in \{1, \ldots, N\} \\ \frac{1}{2^N} & si\ x = N+1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

en donde N es un entero positivo. Encuentre la función generadora de probabilidades de X.

Solución

$\Phi_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{x=1}^{N} t^x \frac{1}{2^x} + t^{N+1} \frac{1}{2^N} = \sum_{x=1}^{N} \left(\frac{t}{2}\right)^x + \frac{t^{N+1}}{2^N}$

$= \frac{\frac{t}{2} - \frac{t^{N+1}}{2^{N+1}}}{1-\frac{t}{2}} + \frac{t^{N+1}}{2^N} = \frac{2^N t + t^{N+1} - t^{N+2}}{2^N (2-t)}$

EJERCICIO 9.62. *Sea X una variable aleatoria distribuida uniformemente en $\{0, 1, \ldots N\}$. Encuentre la función generadora de probabilidades de X y utilícela para calcular su esperanza.*

Solución

Para $t \neq 1$, se tiene:

$\Phi_X(t) = E\left[t^X\right] = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} t^x = \frac{t}{N} \frac{1-t^N}{1-t}$

Así que:

$$\Phi_X(t) = \begin{cases} \frac{t}{N} \frac{1-t^N}{1-t} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

$\Phi'_X(t) = \frac{1}{N} \frac{1-(N+1)t^N + N t^{N+1}}{(1-t)^2}$

Así que:

$E\left[X\right] = \lim_{t \rightsquigarrow 1-} \Phi'_X(t) = \frac{N+1}{2}$

EJERCICIO 9.63. *Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2N^{x-3}}{(N+2)^{x-2}} & si\ x \in \{3, 4, \ldots\} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Encuentre la función generadora de probabilidades de X y utilícela para calcular su esperanza.

Solución

$\Phi_X(t) = E\left[t^X\right] = 2\frac{(N+2)^2}{N^3}\sum_{x=3}^{\infty}\left(\frac{N}{N+2}\right)^x t^x = 2\frac{(N+2)^2}{N^3}\frac{N^3}{(N+2)^3}t^3\frac{1}{1-\frac{N}{N+2}t} = \frac{2t^3}{N+2-Nt}$

$\Phi_X'(t) = 6\frac{t^2}{N+2-Nt} + 2\frac{t^3}{(N+2-Nt)^2}N$

$\Phi'(1) = 3 + \frac{1}{2}N$

EJERCICIO 9.64. *Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con parámetros n y p. Utilice la función generadora de probabilidades de X para calcular su esperanza y su varianza.*

Solución

$\Phi_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{k=0}^{n} t^k P\left[X = k\right] = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(tp)^k(1-p)^{n-k} = (tp+1-p)^n$

$\Phi_X^{'}(t) = np(tp+1-p)^{n-1}$

$\Phi_X^{''}(t) = n(n-1)p^2(tp+1-p)^{n-2}$

Así que:

$E\left[X\right] = \Phi_X^{'}(1) = np$

$E\left[X^2\right] = \Phi_X^{''}(1) + E\left[X\right] = n(n-1)p^2 + np$

$Var(X) = E\left[X^2\right] - \left[E(X)\right]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$

EJERCICIO 9.65. *Sean X y Y dos variables aleatorias independientes cuyas funciones generadoras de probabilidades están dadas por $\Phi_X(t) = e^{t^2-1}$ y $\Phi_Y(t) = \frac{1}{4}\left(t^3+2t^2+1\right)$, respectivamente. Encuentre $E\left[XY(X+1)\right]$.*

Solución

$\Phi_X'(t) = 2te^{t^2-1}$

$\Phi_X''(t) = (4t^2+2)e^{t^2-1}$

$\Phi'_Y(t) = \frac{1}{4}(3t^2 + 4t)$

Así que:

$E[X] = \Phi'_X(1) = 2$

$E[X^2] = \Phi'_X(1) + \Phi''_X(1) = 8$

$E[Y] = \Phi'_Y(1) = \frac{7}{4}$

Como X y Y son independientes:

$E[XY(X+1)] = E[X^2]E[Y] + E[X]E[Y] = \frac{35}{2}$

Ejercicio 9.66. *Sean X y Y variables aleatorias independientes cuyas funciones generadoras de probabilidades están dadas por $\Phi_X(t) = \frac{2t^4+t^3+3t+2}{8}$ y $\Phi_X(t) = \frac{4t^3+2t^2+3t}{9}$, respectivamente. Encuentre $E[XY^2(2X+3)]$.*

Solución

$\Phi'_X(t) = \frac{8t^3+3t^2+3}{8}$

$\Phi''_X(t) = \frac{24t^2+6t}{8}$

$\Phi'_Y(t) = \frac{12t^2+4t+3}{9}$

$\Phi''_Y(t) = \frac{24t+4}{9}$

Así que:

$E[X] = \Phi'_X(1) = \frac{7}{4}$

$E[Y] = \Phi'_Y(1) = \frac{19}{9}$

$E[X^2] = \Phi''_X(1) + E[X] = \frac{11}{2}$

$E[Y^2] = \Phi''_Y(1) + E[Y] = \frac{47}{98}$

$E[XY^2(2X+3)] = 2E[X^2]E[Y^2] + 3E[X]E[Y^2] = \frac{3055}{36} = 84.861$

Ejercicio 9.67. *Sean X y Y dos variables aleatorias independientes cuyas funciones generadoras de probabilidades están dadas por $\Phi_X(t) = \frac{3t^4+t^3+5t^2+1}{10}$ y $\Phi_Y(t) = \frac{4t^3+2t^2+3t}{9}$, respectivamente. Encuentre la función de densidad de $X+Y$.*

Solución

$\Phi_{X+Y}(t) = \left(\frac{3t^4+t^3+5t^2+1}{10}\right)\left(\frac{4t^3+2t^2+3t}{9}\right)$

$= \frac{1}{90}\left(12t^7 + 10t^6 + 31t^5 + 13t^4 + 19t^3 + 2t^2 + 3t\right)$

Así que:

$f_{X+Y}(1) = \frac{3}{90}$; $f_{X+Y}(2) = \frac{2}{90}$; $f_{X+Y}(3) = \frac{19}{90}$; $f_{X+Y}(4) = \frac{13}{90}$; $f_{X+Y}(5) = \frac{31}{90}$; $f_{X+Y}(6) = \frac{10}{90}$; $f_{X+Y}(7) = \frac{12}{90}$

$f_{X+Y}(z) = 0$ para $z \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ejercicio 9.68. *Demuestre los siguientes resultados:*

a) Si X y Y son variables aleatorias independientes, ambas con distribución binomial de parámetros n_1, p y n_2, p respectivamente, entonces $X + Y$ tiene distribución binomial con parámetros $n_1 + n_2, p$.

b) Si X y Y son variables aleatorias independientes, ambas con distribución Poisson de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces $X + Y$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Solución

a. Si X tiene distribución binomial con parámetros n y p, entonces:

$\Phi_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{x=0}^{n} t^x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pt)^x (1-p)^{n-x} = (pt + 1 - p)^n$

Por lo tanto:

$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = (pt + 1 - p)^{n_1}(pt + 1 - p)^{n_2} = (pt + 1 - p)^{n_1+n_2}$

Así que $X + Y$ tiene distribución binomial con parámetros $n_1 + n_2, p$.

b. Si X tiene distribución Poisson con parámetro λ, entonces:

$\Phi_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} t^x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$

Por lo tanto:

$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = e^{\lambda_1(t-1)} e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$

Así que $X + Y$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Ejercicio 9.69. *Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

Encuentre la función generadora de momentos de X, especificando la región en la cual está bien definida.

Solución

$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}e^{tx}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x}e^{tx}dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(1+t)x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(1-t)x}dx = \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2(1-t)}$

para $-1 < t < 1$.

Ejercicio 9.70. *Demuestre que si X y Y son variables aleatorias independientes, ambas con distribución normal de parámetros μ_1, σ_1^2 y μ_2, σ_2^2 respectivamente, entonces $X + Y$ tiene distribución normal con parámetros $\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.*

Solución

$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = \exp\left\{\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2\right\} \exp\left\{\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2\right\}$

$= \exp\left\{(\mu_1 + \mu_2)t + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2\right\}$

Así que $X + Y$ tiene distribución normal con parámetros $\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Ejercicio 9.71. *Sean X y Y dos variables aleatorias independientes, ambas con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Encuentre la función generadora de momentos de a) $U = X + Y$ y b) $V = X - Y$.*

Solución

$M_X(t) = M_Y(t) = \int_0^1 e^{tx}dx = \begin{cases} \frac{1}{t}(e^t - 1) & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

$M_{-Y}(t) = E[e^{-tY}] = \int_0^1 e^{-tx}dx = \begin{cases} \frac{1}{t}(1 - e^{-t}) & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{t}e^{-t}(e^t - 1) & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

a. $M_U(t) = M_X(t)M_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2}(e^t - 1)^2 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

b. $M_V(t) = M_X(t)M_{-Y}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2}e^{-t}(e^t-1)^2 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Obsérvese que la función generadora de una variable aleatoria idénticamente -1 está data por $M(t) = e^{-t}$, de manera que la función generadora de $-Y$ es la misma que la de $Y-1$, lo cual se explica por el hecho de que $-Y$ y $1-Y$ tienen la misma distribución.

También la función generadora de $X-Y$ es igual a la de $X+Y-1$, por la misma razón.

Ejercicio 9.72. *Utilice la función generadora de momentos para encontrar la esperanza y la varianza de X en cada uno de los casos siguientes:*

a) X tiene distribución exponencial con parámetro λ.

b) X tiene distribución gama con parámetros α y λ.

c) X tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2.

Solución

a. $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$ para $t < \lambda$, así que:

$M_X'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$

$M_X''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$

Por lo tanto:

$E[X] = M_X'(0) = \frac{1}{\lambda}$

$E[X^2] = M_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

b. $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$, para $t < \lambda$, así que:

$M_X'(t) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha+1}$

$M_X''(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha+2}$

Por lo tanto:

$E[X] = M'_X(0) = \frac{\alpha}{\lambda}$

$E[X^n] = M''_X(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

c. $M_X(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$ para cualquier número real t, así que:

$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t)\exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$

$M''_X(t) = (\mu + \sigma^2 t)^2 \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\} + \sigma^2 \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$

Por lo tanto:

$E[X] = M'_X(0) = \mu$

$E[X^2] = M''_X(0) = \mu^2 + \sigma^2$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$

Ejercicio 9.73. *Sean X y Y dos variables aleatorias independientes cuyas funciones generadoras de momentos están dadas por $M_X(t) = (1-t)^{-3}e^{2t}$ y $M_Y(t) = \frac{1}{4}\left(e^{3t} + 2e^{2t} + 1\right)$, respectivamente. Encuentre $E\left[X^3 Y (X - Y^2)\right]$.*

Solución

$M'_X(t) = \frac{3}{(1-t)^4}e^{2t} + \frac{2}{(1-t)^3}e^{2t}$

$M''_X(t) = \frac{12}{(1-t)^5}e^{2t} + \frac{12}{(1-t)^4}e^{2t} + \frac{4}{(1-t)^3}e^{2t}$

$M'''_X(t) = \frac{60}{(1-t)^6}e^{2t} + \frac{72}{(1-t)^5}e^{2t} + \frac{36}{(1-t)^4}e^{2t} + \frac{8}{(1-t)^3}e^{2t}$

$M''''_X(t) = \frac{360}{(1-t)^7}e^{2t} + \frac{480}{(1-t)^6}e^{2t} + \frac{288}{(1-t)^5}e^{2t} + \frac{96}{(1-t)^4}e^{2t} + \frac{16}{(1-t)^3}e^{2t}$

$M'_Y(t) = \frac{3}{4}e^{3t} + e^{2t}$

$M''_Y(t) = \frac{9}{4}e^{3t} + 2e^{2t}$

$M'''_Y(t) = \frac{27}{4}e^{3t} + 4e^{2t}$

Así que:

$E\left[X^3\right] = M'''_X(0) = 176$

$E\left[X^4\right] = M_X''''(0) = 1240$

$E\left[Y\right] = M_Y'(0) = \frac{7}{4}$

$E\left[Y^3\right] = M_Y'''(0) = \frac{43}{4}$

$E\left[X^3Y(X-Y^2)\right] = E\left[X^4\right]E\left[Y\right] - E\left[X^3\right]E\left[Y^3\right] = (1240)\left(\frac{7}{4}\right) - (176)\left(\frac{43}{4}\right) = 278$